Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 139.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1911.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 139.

Seite

Grosschmid, L. v., Über die explizite Darstellung aller rationalen Lösungen einer quadratischen binomischen Kongruenz mit Hilfe der Idealfaktoren des Modulus . . . . . 101—105

Haar, A. und **König, D.,** Über einfach geordnete Mengen . . . . . 16— 28

Koebe, P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweiter Teil: Die zentralen Uniformisierungsprobleme . . . . . 251—292

König, D. und **Haar, A.,** Über einfach geordnete Mengen . . . . . 16— 28

Meyer, W. Fr., Über kürzeste Abstände und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff in der Theorie der Raumkurven und Flächen . 106—117

Miller, G. A., Note on the equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, s_1 and s_2 being operators of a finite group . . . . . 80— 84

Mirimanoff, D., Sur le dernier théorème de *Fermat* . . . . . 309—324

Müntz, Ch., Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen . . . . . 52— 79

Noether, E., Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln . . . 118—154

Remak, R., Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren . . . . . 293—308

Schottky, F., Vier Briefe *Cayleys*, nebst Vorbemerkung . . . . . 1— 6

— — Über eine *Cayley*sche Form und deren Anwendung auf das Problem des letzten Schnittpunkts zweier Kurven dritter Ordnung 7— 12

— — Über einen Satz, der sich auf die Anordnung der 4^p Thetafunktionen bezieht . . . . . 13— 15

Schur, J., Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen . . . . . 155—250

Steinbacher, F., *Abel*sche Körper als Kreisteilungskörper . . . . . 85—100

Thomé, L. W., Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf Systeme linearer partieller und linearer totaler Differentialgleichungen . . . . . 29— 51

228881

Vier Briefe *Cayleys*,

nebst Vorbemerkung.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Vorbemerkung.

Die Briefe *Cayleys* an mich, die ich hiermit veröffentliche, sind in den Jahren 1880 und 1881 geschrieben; sie sind dadurch veranlaßt, daß ich *Cayley* ein Exemplar meines bei *Teubner* erschienenen Buches übersandte: „Abriß einer Theorie der *Abel*schen Funktionen von drei Variabeln", von dem ein Teil 1878 mir als Habilitationsschrift gedient hatte. Ich lege die Briefe, die mathematisch sind, wenn sie auch nicht den Charakter einer vollständig durchgearbeiteten mathematischen Abhandlung haben, hauptsächlich deshalb den Fachgenossen vor, weil ich, als sie mir vor kurzem wieder in die Hände kamen, in ihnen einen Satz fand und damit die Anregung zu einer Aufgabe, die ich in diesem Journal in einer kurzen Notiz behandeln werde.

F. Schottky.

I.

Dear Sir,

I have to thank you very much for the copy of your book „Abriß einer Theorie etc." I am reading it with the greatest possible interest: a discussion of your problem, that of arriving at a theory of the triple theta-functions independently of the theory of algebraical integrals is the very thing which I most wished to see. The very general form (belonging, I understand you, to *Weierstrass*) of the multiple theta-function, and consequently also, as applicable to this form, the equation (3′), was new to me. I observe that you do not give the $4\varrho^2$ equations which

connect the coefficients $\eta, \eta', \omega, \omega'$ with the coefficients of the quadric function G: I find that these can be expressed in a very compendious form, by means of four symbolical equations, giving by the elimination of the coefficients of G your equations (6) p. 4. I admire very much your expression of the 64 characteristics by means of the seven suffixes, and their binary and ternary combinations.

I enclose the abstract of a paper completed some time ago, which I hope to send you upon the *double* theta-functions, but it may be still some months before it is printed. I remain, dear Sir, yours very sincerely

A. Cayley.

Cambridge 24th May 1880.

II.

Dear Sir,

I am studying with renewed pleasure your most interesting work on the Abelian functions of three variables. It seems to me that there should be some more simple and à priori method of establishing the connection of the functions with the integrals

$$\int \frac{H_\nu \Delta}{R}, \quad = \int \frac{H_\nu (H dx + \overline{H} dy + \overline{\overline{H}} dz)}{\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7}}$$

considered as belonging to the sextic curve $L = 0$ with 7 double points: and although I have not succeeded in doing this, I venture to submit to you some considerations upon the subject.

I look at the question as follows: Start with a given sextic curve $L = 0$, with 7 given points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ as double points. Take $H = 0$, $\overline{H} = 0$, $\overline{\overline{H}} = 0$ cubic curves (at pleasure) through the seven points: we have an identity

$$(ax + by + cz) H + (a'x + b'y + c'z) \overline{H} + (a''x + b''y + c''z) \overline{\overline{H}} = 0,$$

and by properly choosing the axes of coordinates, we may make this identity to be $xH + y\overline{H} + z\overline{\overline{H}} = 0$. We have therefore $H, \overline{H}, \overline{\overline{H}} = Qz - Ry$, $Rx - Pz, Py - Qx; P, Q, R$ being quadric functions of the coordinates.

We then take $H_1 = 0$, the cubic curve, having 1 as double point, and passing through the remaining points $2, 3, 4, 5, 6, 7$: and similarly $H_2 = 0, \ldots H_7 = 0: H_1, H_2, \ldots H_7$ are linear functions of $H, \overline{H}, \overline{\overline{H}}$.

The general sextic curve having the 7 points as double points should contain 6 constants: and its equation is

$$L=(a,b,c,f,g,h)(H,\overline{H},\overline{\overline{H}})^2+\ Jac.\ (H,\overline{H},\overline{\overline{H}}),$$

(if, as I believe, the *Jacobian* of the three cubic functions $H,\overline{H},\overline{\overline{H}}$ is *not* expressible as a quadric function of $H,\overline{H},\overline{\overline{H}}$).

Now by *Abel*s theorem we connect the curve $L=0$ with the integrals

$$\int \Phi \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ \partial_x L & \partial_y L & \partial_z L \end{vmatrix},$$

where Φ, and also A,B,C are arbitrary functions of (x,y,z)*). Take $A,B,C=P,Q,R$, then the form becomes

$$\int \frac{\Phi(H\,dx+\overline{H}\,dy+\overline{\overline{H}}\,dz)}{H\,\partial_x L+\overline{H}\,\partial_y L+\overline{\overline{H}}\,\partial_z L},$$

and it seems to me that this ought to be reducible to your form above referred to: the two forms would agree if we had

$H\,\partial_x L+\overline{H}\,\partial_y L+\overline{\overline{H}}\,\partial_z L=K\Theta\sqrt[3]{H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7}$ in virtue of $L=0$;

and if we had an identity

$$(H\,\partial_x L+\overline{H}\,\partial_y L+\overline{\overline{H}}\,\partial_z L)^3=K^3\Theta^3H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7+ML,$$

K a constant, Θ a linear function and M a function of (x,y,z)[18]: but I cannot verify the existence of such an identity.

A particular case (nugatory from its simplicity) is $L=H^2$; here $K=0$ and $M=8H\ (HH_x+\overline{H}H_y+\overline{\overline{H}}H_z)^3$.

A. Cayley.

Cambridge 18th June 1881.

III.

Dear Sir,

I am very sorry that in the letter I sent you a few days ago, the formulae were written down inaccurately: the general form of the integral is of course

$$\int \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix}}{A\,\partial_x L+B\,\partial_y L+C\,\partial_z L},$$

---

*) Hier macht *Cayley* ein Versehen, das er im folgenden Briefe berichtigt.
F. S.

and hence if

$$H, \overline{H}, \overline{\overline{H}} = Ry - Qz, Pz - Rx, Qx - Py$$

(P, Q, R being quadric functions of (x, y, z)), writing $A, B, C = P, Q, R$, this is

$$\int \frac{H\,dx + \overline{H}\,dy + \overline{\overline{H}}\,dz}{P\,\partial_x L + Q\,\partial_y L + R\,\partial_z L},$$

so that the form of identity which ought to subsist is

$$(P\,\partial_x L + Q\,\partial_y L + R\,\partial_z L)^3 = K\,H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7 + M\,L,$$

K a constant, and M a function of (x, y, z)[15]. This is a better form, but I do not see how to verify it. With many apologies for my very careless mistake believe me dear Sir yours very sincerely

A. Cayley.

Cambridge 21th June 1881.

IV.

Dear Sir,

I have to thank you for your letter of the 27th June. I had satisfied myself that the identity subsisted for the sextic curve $L = 0$ which is the locus of the dps. of the nodal cubics through the 7 points.

It appears to me that the crowning point of the whole theory is in your equations (63), (66), (68) and (68)*): I understand these as giving expressions for the ratios of the 64 σ-functions in terms of 8 points on the sextic curve, say the four points $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ which are the intersections by an arbitrary cubic through the seven points, and the four arbitrary points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. And for the more complete expression of these equations, I think the following notations would be useful.

0 is the current point, coordinates x, y, z.

$1, 2, \ldots \alpha$ etc. the points coordinates $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots$

$(x_a\, y_a\, z_a)$ etc.

viz. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ are the seven points; and $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ the 8 points as above.

$$012 \text{ the determinant } \begin{vmatrix} x, y, z \\ x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \end{vmatrix},$$

---

*) should be (69)

$\mathbf{012345}$ the determinant $\begin{vmatrix} x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy \\ x_1^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \vdots \end{vmatrix}$,

$\mathbf{0123456789}$ the determinant

$$\begin{vmatrix} x^3, y^3, z^3, y^2z, z^2x, x^2y, yz^2, zx^2, xy^2, xyz \\ x_1^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \vdots \end{vmatrix},$$

but

$\mathbf{0111234567}$ the determinant

$$\begin{vmatrix} x^3, & y^3, & z^3, & y^2z, & z^2x, & x^2y, & yz^2, & zx^2, & xy^2, & xyz \\ 3x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & z_1^2, & 2x_1y_1, & \cdot & 2z_1x_1, & y_1^2, & y_1z_1 \\ \cdot & 3y_1^2 & \cdot & 2y_1z_1 & \cdot & x_1^2, & z_1^2 & 2x_1y_1, & & z_1x_1 \\ \cdot & \cdot & 3z_1^2, & y_1^2, & 2z_1x_1 & \cdot & 2y_1z_1, & x_1^2 & \cdot & x_1y_1 \\ x_2^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots \end{vmatrix},$$

so that $\mathbf{0111234567}=0$ is the equation of the cubic curve having 1 for a dp. and passing through $2,3,4,5,6,7$—[there is of course no risk of ambiguity, since the first form of determinant would vanish, if any two of the symbols contained therein were identical].

Your equation (63) then is ($\varkappa=1$):

$$\Psi\sigma_1 = \sqrt{H_1^\alpha H_1^\beta H_1^\gamma H_1^\delta}\,\frac{1}{g_1}P_1$$

where

$$H_1^\alpha = \alpha\,111234567,$$
$$H_1^\beta = \beta\,111234567,$$
$$\text{etc.}$$
$$g_1 = 234567,$$
$$P_1 = \alpha\beta\gamma\delta 234567,$$

and similarly we have, with complete explanation of the meanings of all the symbols which occur therein, your other equations (66), (68) and (69) — only the values of the c in (66), c (or $c_{\varkappa\lambda\mu}$) of (68) and c of (69) seem still to require determination.

The equations in question must contain in themselves, potentially, *all* the algebraical relations between the 64 σ-functions; and it would seem that for obtaining any such relation it would be enough to eliminate the points α,β,γ and that the other points $\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ would then always

disappear of themselves. And as the algebraical relations between the σ-functions are in fact known, it must be theoretically possible to effect in this way the determination of the remaining constants c. I have ventured to trouble you with these remarks, which add nothing to, though they seem to me bring out, what is already in your book: the subject is one in which I take the greatest possible interest.

A. Cayley.

Cambridge 8th July 1881.

Über eine *Cayley*sche Form und deren Anwendung auf das Problem des letzten Schnittpunkts zweier Kurven dritter Ordnung.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Bei den mathematischen Briefen *Cayley*s an mich handelt es sich besonders um zwei verschiedene Formen der Differentiale erster Gattung, die zu einer bestimmten homogenen Gleichung $L=0$ zwischen drei Veränderlichen x, y, z gehören. $L=0$ ist die Bedingung, daß eine Kurve dritter Ordnung existiert, die durch sieben fest gegebene Punkte hindurchgeht und in (x, y, z) einen Doppelpunkt besitzt. Wenn man drei linear unabhängige kubische Funktionen X, Y, Z aufstellt, die in den sieben festen Punkten verschwinden, so ist L die Funktionaldeterminante von X, Y, Z nach x, y, z. Diese Gleichung $L=0$, zu der die genaue Untersuchung der Theta-Relationen des Falles $p=3$ mit Notwendigkeit führt, war schon vorher den Geometern bekannt und heißt mit Recht die *Aronhold*sche.

Die eine (*Riemann*sche) Form des Integrals erster Gattung ist:

$$\frac{H}{\frac{\partial L}{\partial z}}(x\,dy-y\,dx),$$

wo H irgend eine lineare Funktion von X, Y, Z bedeutet. Die andere ist:

$$\frac{H(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)}{\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7}}.$$

Bei dieser zweiten Form hat man sich die drei Funktionen X, Y, Z so gewählt zu denken, daß identisch $Xx+Yy+Zz=0$ ist. $H_1, H_2, \ldots H_7$ sind ebenfalls lineare Funktionen von X, Y, Z, und zwar ist $H_a=0$ diejenige spezielle der Kurven $aX+bY+cZ=0$, die im Punkte (α) einen Doppelpunkt hat.

Ist in den beiden Differentialausdrücken H dieselbe Funktion, so können sie sich nur um einen konstanten Faktor K unterscheiden. Man kann demnach die Gleichungen aufstellen:

$$x\,dy - y\,dx = \tau\,\frac{\partial L}{\partial z},$$

$$K\tau = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7}}$$

und ihnen noch die andern, die sich daraus ergeben, hinzufügen:

$$y\,dz - z\,dy = \tau\,\frac{\partial L}{\partial x},$$

$$z\,dx - x\,dz = \tau\,\frac{\partial L}{\partial y}.$$

Cayley zieht aus ihnen folgenden Schluß*). Da identisch $Xx + Yy + Zz = 0$ ist, so kann man drei quadratische Funktionen p, q, r von x, y, z so bestimmen, daß

$$X = qz - ry,\quad Y = rx - pz,\quad Z = py - qx$$

ist. Alsdann folgt:

$$-\varphi = p\,\frac{\partial L}{\partial x} + q\,\frac{\partial L}{\partial y} + r\,\frac{\partial L}{\partial z} = K\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6 H_7}.$$

Es wird demnach, wenn die Gleichung $L = 0$ besteht, die dritte Wurzel, die auf der rechten Seite steht, dargestellt als ganze Funktion siebenten Grades von x, y, z. — Wir bezeichnen diesen *Cayley*schen Ausdruck durch $-\varphi$.

Es ist natürlich möglich, direkt zu beweisen, daß eine Gleichung von dieser Form besteht, und auch die Bestimmung des konstanten Faktors K begegnet keinen unüberwindlichen Schwierigkeiten, sobald man die hier auftretenden Funktionen $X, Y, Z, L, H_1, H_2, \ldots H_7$ genau, auch in ihren konstanten Faktoren definiert hat. Ich will statt dessen eine andere Frage erörtern.

Es ist eine bekannte Aufgabe, den neunten Schnittpunkt zweier Kurven dritter Ordnung analytisch zu bestimmen, wenn die acht übrigen gegeben sind. Betrachtet man sieben derselben als fest, den achten, (x, y, z), als variabel, so sind die Koordinaten x', y', z' des neunten Punktes, nach Herrn *Geiser*, ganzen Funktionen achten Grades von x, y, z propor-

*) Ich selbst habe die Verbindung mit der *Riemann*schen Theorie nicht gesucht, und ich hebe deswegen besonders hervor, daß die Vergleichung der beiden Formen ein *Cayley*scher Gedanke ist.

tional. Es fragt sich, ob man diese drei ganzen Funktionen achten Grades mit Hilfe der *Cayley*schen Form φ (die vom siebenten Grade ist) explizite ausdrücken kann.

Es seien P, Q, R dieselben quadratischen Funktionen von drei Größen ξ, η, ζ, die p, q, r von x, y, z sind. Wir stellen den Ausdruck auf

$$XP + YQ + ZR = U,$$

der sich wegen der identisch bestehenden Gleichung $Xp + Yq + Zr = 0$ auf 0 reduziert, wenn ξ, η, ζ proportional x, y, z werden. Wir verstehen aber unter ξ, η, ζ nicht unabhängige Veränderliche sondern Funktionen; und zwar soll

$$\xi = \beta Z - \gamma Y, \quad \eta = \gamma X - \alpha Z, \quad \zeta = \alpha Y - \beta X$$

sein, wo α, β, γ zunächst willkürliche Konstanten bedeuten. U ist dann eine kubische Funktion von X, Y, Z, also eine Funktion neunten Grades von x, y, z. Diese Funktion neunten Grades zerfällt in zwei Faktoren, von denen der eine linear, der andere vom achten Grade ist.

Der Linearfaktor ist $t = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Denn es ist $\xi y - \eta x = tZ$ (da $xX + yY + zZ = 0$ ist). Ist also $t = 0$, so werden ξ, η, ζ proportional x, y, z; somit wird $U = 0$.

U enthält aber auch den Faktor $t' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$, wo x', y', z' die Koordinaten des zu (x, y, z) konjugierten Punktes sind, ausgedrückt als ganze Funktionen achten Grades von x, y, z. Dies folgt einfach daraus, daß die Verhältnisse von X, Y, Z und somit auch das Verhältnis von U zu X^3 ungeändert bleiben, wenn man x, y, z durch x', y', z' ersetzt. Demnach darf man setzen:

$$U = tt'^{*}).$$

Hiermit ist die ganze Funktion achten Grades von x, y, z: $t' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$, rational durch x, y, z, aber in gebrochner Form, dargestellt. Es kommt nun darauf an, die Division wirklich auszuführen. Dabei können wir uns beschränken auf den speziellen Fall, wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ ist. Wir haben dann

$$\xi = -Y, \quad \eta = X, \quad \zeta = 0;$$
$$t = z, \quad t' = z', \quad U = zz'.$$

---

*) Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung

$$L(X, y) = g_0(u'y' + u''y'' + u'''y''')(U'y' + U''y'' + U'''y'''),$$

die Herr *Frobenius* aufstellt auf S. 287 der Abhandlung: „Über die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung", dieses Journal Bd. 99. Die Herleitung der Gleichung ist bei Herrn *Frobenius* eine andere.

Aus der Gleichung

$$zz' = XP + YQ + ZR$$

eliminieren wir Z mit Hilfe der Relation: $xX + yY + zZ = 0$. Wir erhalten:

$$z^2 z' = AY - BX, \text{ wo}$$
$$A = zQ - yR, \quad B = xR - zP$$

ist. Nun ist aber, da Q aus der quadratischen Funktion q hervorgeht, indem man x, y, z durch $-Y, X, 0$ ersetzt:

$$2Q = Y^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - 2XY \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + X^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2},$$

und entsprechende Gleichungen gelten für R und P. Folglich ist:

$$2A = Y^2\left(z\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) - 2XY\left(z\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\right) + X^2\left(z\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right).$$

Da $zq - yr = X$ ist, so sind die drei eingeklammerten Ausdrücke auf der rechten Seite bezüglich gleich

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Daher ist:

$$2A = Y^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - 2XY \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + X^2 \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2X\left(X\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Ebenso ist:

$$2B = Y^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - 2XY \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + X^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2Y\left(X\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Demnach:

$$2z^2 z' = Y^3 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - Y^2 X\left(2\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) + YX^2\left(2\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right) - X^3 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

Dies läßt sich reduzieren. Man führe ein:

$$F = Y\frac{\partial X}{\partial x} - X\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad G = Y\frac{\partial X}{\partial y} - X\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Dann hat man:

$$2z^2 z' = Y^2 \frac{\partial F}{\partial x} - XY\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x}\right) + X^2 \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Man setze weiter:

$$YF - XG = M.$$

Dann wird:

$$2z^2 z' = Y\frac{\partial M}{\partial x} - X\frac{\partial M}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)M.$$

Nun ist

$$M = Y^2\frac{\partial X}{\partial x} + X^2\frac{\partial Y}{\partial y} - XY\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

Bezeichnen wir mit L die durch die Zahl 6 dividierte Funktionaldeterminante

$$L=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x}\\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y}\\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z}\end{vmatrix},$$

so folgt zunächst, da X, Y, Z homogene Funktionen dritten Grades sind:

$$zL=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x}\\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

Da ferner:

$$x\,X+y\,Y+z\,Z=0,$$
$$x\frac{\partial X}{\partial x}+y\frac{\partial Y}{\partial x}+z\frac{\partial Z}{\partial x}=-X,$$
$$x\frac{\partial X}{\partial y}+y\frac{\partial Y}{\partial y}+z\frac{\partial Z}{\partial y}=-Y$$

ist, so ergibt sich:

$$z^2L=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & -X\\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & -Y\\ X & Y & 0\end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist offenbar mit dem Ausdruck M identisch. Es ist daher $M=2z^2L$, und:

$$z'=Y\frac{\partial L}{\partial x}-X\frac{\partial L}{\partial y}+\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)L.$$

Damit ist z' bereits dargestellt als ganze Funktion von x, y, z. Wir führen nun ein:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=4p,\quad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=4q,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=4r.$$

Dann sind p, q, r quadratische Funktionen von x, y, z, die, wie man leicht sieht, den Gleichungen genügen:

$$X=qz-ry,\quad Y=rx-pz,\quad Z=py-qx,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=0;$$

sie sind auch vollständig bestimmt durch diese vier Gleichungen. Es ist nun:

$$z' = (rx - pz)\frac{\partial L}{\partial x} - (qz - ry)\frac{\partial L}{\partial y} - 4rL,$$

und da $x\frac{\partial L}{\partial x} + y\frac{\partial L}{\partial y} + z\frac{\partial L}{\partial z} = 6L$ ist:

$$z' = \varphi z + 2Lr,$$

wo φ den *Cayley*schen Ausdruck bedeutet:

$$\varphi = -\left(p\frac{\partial L}{\partial x} + q\frac{\partial L}{\partial y} + r\frac{\partial L}{\partial z}\right).$$

Wir haben demnach folgendes Resultat:

Es seien X, Y, Z drei in den sieben festen Punkten verschwindende kubische Funktionen von x, y, z, so gewählt, daß die Gleichung $Xx + Yy + Zz = 0$ stattfindet; es sei ferner

$$4p = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},\quad 4q = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},\quad 4r = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

und L die Funktionaldeterminante von X, Y, Z nach x, y, z. Bildet man hieraus den *Cayley*schen Ausdruck $\varphi = -\left(p\frac{\partial L}{\partial x} + q\frac{\partial L}{\partial y} + r\frac{\partial L}{\partial z}\right)$, so sind $\varphi x + 2Lp$, $\varphi y + 2Lq$, $\varphi z + 2Lr$ die Koordinaten des zu x, y, z konjugierten Punktes.

Über einen Satz, der sich auf die Anordnung der 4^p Thetafunktionen bezieht.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

In dem ersten der an mich gerichteten Briefe erwähnt *Cayley* mit freundlicher Anerkennung einen Satz, der sich auf S. 18 meines Buches findet, in demjenigen Teile, der schon 1878 als Habilitationsschrift gedruckt war. *Stahl* hat diesen Satz einen Satz von *Riemann* genannt und gab nur zu, daß ich einen zweiten Beweis für ihn gefunden habe. Da die Aussage *Stahl*s sehr bestimmt lautete, und da ich mich um Arbeiten von mir, die bereits gedruckt waren, nicht zu kümmern pflegte, nahm ich die *Stahl*sche Behauptung ohne Prüfung als richtig an; sie besaß auch nach einer Erfahrung, die ich bereits gemacht hatte, für mich etwas Wahrscheinliches. Dennoch beruht sie auf einem Irrtum. Um eine Beurteilung der Sache zu erleichtern, schreibe ich zunächst meinen Satz hin:

„Es ist möglich, ein System primitiver Indizes $1, 2, 3, \ldots 2\varrho+1$ und einen ausgezeichneten ε so zu wählen, daß εa ein gerader Index ist, wenn die Anzahl primitiver Indizes, aus denen a zusammengesetzt ist, $\equiv \varrho$ oder $\varrho+1$ mod. 4 ist, dagegen ein ungerader, wenn diese Anzahl $\equiv \varrho+2$ oder $\varrho-1$ mod. 4 ist". (*Schottky*, *Abel*sche Funktionen von 3 Variabeln, S. 18, Breslau 1878).

Die *Stahl*sche Bemerkung lautet so:

„In einer Abhandlung über das Additionstheorem der ϑ-Funktion (Seite 117 dieses Bandes) habe ich einen Satz von *Riemann* über Charakteristiken benutzt, der für die Theorie der ϑ und der *Abel*schen Funktionen von Wichtigkeit ist. Von diesem Satze liegen zwei Beweise vor, einer von Herrn *Prym*, der auf Untersuchung der hyperelliptischen ϑ-Funktionen beruht, und ein zweiter von Herrn *Schottky*, der den Satz in spezieller Form wiedergibt". (*H. Stahl*, Beweis eines Satzes von *Riemann* über ϑ-Charakteristiken, dieses Journal Bd. 88, S. 273 (1880)).

Die Stelle der *Prym*schen Schrift, auf die sich *Stahl* bezieht, ist folgende:

„Damit ist bewiesen, daß von den 2^{2p} verschiedenen ϑ-Funktionen, deren Charakteristiken in den Formen

$$(z), (z)+\overset{1}{\Sigma}(a), \ldots (z)+\overset{m}{\Sigma}(a), \ldots (z)+\overset{p}{\Sigma}(a)$$

enthalten sind, als gerade ϑ diejenigen auftreten, deren Charakteristiken den Formen

$$(z)+\overset{0,\,p}{\Sigma}(a), (z)+\overset{p-4m-3}{\Sigma}(a), \quad (z)+\overset{p-4m-4}{\Sigma}(a) \qquad (m=0,1,\ldots)$$

entsprechen, als ungerade ϑ diejenigen, deren Charakteristiken den Formen

$$(z)+\overset{p-4m-1}{\Sigma}(a), (z)+\overset{p-4m-2}{\Sigma}(a)$$

entsprechen. Ferner verschwinden für $(v)=0$ nur diejenigen $(2p+1)_p$ ϑ nicht, deren Charakteristiken in der Form $(z)+\overset{p}{\Sigma}(a)$ enthalten sind. Diese Sätze über die Charakteristiken rühren von Herrn *Riemann* her und wurden mir im vorigen Jahre von meinem hochverehrten Lehrer mündlich für einen besonderen Fall der Zerlegung von T in T' mitgeteilt. Er erwähnte dabei, daß der allgemeine Beweis der Gültigkeit derselben für jede Art der Zerlegung leicht durch Betrachtung der Derivierten der ϑ gewonnen werden könne. Diesen Beweis habe ich im vorigen zu bringen versucht". (*Prym*, Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche S. 33, Separatabdruck aus dem 22-ten Bande der Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1876).

Herr *Noether* äußert sich über den von mir entdeckten Satz folgendermaßen:

„Ein sehr spezielles System von $2p+1$ Charakteristiken ist von Herrn *Schottky*, *Abel*sche Funktionen von 3 Variabeln, Breslau 1878, entwickelt". (*Noether*, Über die Thetacharakteristiken. Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen; 28. Juli 1879).

Flüchtig und äußerlich betrachtet kann der von Herrn *Prym* 1876 mitgeteilte *Riemann*sche Satz als dasselbe erscheinen wie das, was ich 12 Jahre später gesagt habe. Dem Wesen nach besteht ein sehr großer Unterschied. Der *Riemann*sche Satz bezieht sich, nicht nur seinem Beweise, sondern auch seinem vollen Inhalte und der von Herrn *Prym* beigefügten Bemerkung nach, ausschließlich auf hyperelliptische ϑ-Funktionen und gibt in bewundernswerter Weise Aufschluß über eine Frage, die zu den tiefsten der *Riemann*schen Theorie gehört. In dem, was Herr *Prym* mitteilt, ist eine glänzende Leistung *Riemann*s enthalten. Aber nichts und gar nichts

deutet darauf hin, daß *Prym* oder *Riemann* hierbei an andere als hyperelliptische ϑ gedacht haben.

Der *Stahl*schen Äußerung liegt der folgende richtige Gedanke zugrunde. Wenn ein aufmerksamer und scharfsinniger Leser der *Prym*schen Schrift sich die Frage vorgelegt hätte, ob ein Teil dessen, was Herrn *Prym* von seinem großen Lehrer mitgeteilt war, sich von den hyperelliptischen auf allgemeine ϑ übertragen lasse, so hätte er vermöge dieses neuen Gedankens mühelos den elementaren Satz finden können, um den es sich bei mir handelt. Aber er hätte dann nach einem direkten Beweise suchen müssen. Denn es wäre sinnwidrig, den lediglich kombinatorischen Satz, den ich aufstelle, mit den Methoden der *Riemann*schen Theorie beweisen zu wollen.

Mein Theorem, auf das ich direkt zugehe, ist bei mir der erste Schritt zu der von *Riemann* selbst entschieden abgelehnten*) Untersuchung der Thetafunktionen von drei Variabeln auf *Göpel*sche Art. Es ist also auch dem Ausgangspunkte nach völlig unabhängig von *Riemann*.

Stahl und *Noether* gebrauchen in bezug auf meine Untersuchung das Wort „speziell". Der Satz selbst ist die Hauptsache, und dieser ist von mir allgemein ausgesprochen. Die Frage, wie sich möglichst allgemein Reihen von der in dem Theorem geforderten Art bilden lassen, ist von sekundärer Bedeutung, wenn auch nicht ganz ohne Interesse. In einer späteren Arbeit (Über die Moduln der Thetafunktionen, Acta math. Bd. 27, S. 243) sage ich, indem ich mich der von Herrn *Frobenius* eingeführten zweckmäßigen Bezeichnung anschließe:

Es kann eine azygetische Reihe von $2\varrho+1$ gleichartigen Theta aufgestellt werden.

Dies ist im wesentlichen derselbe Satz. Denn wenn $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2\varrho+1}$ untereinander gleichartig und außerdem azygetisch sind, so folgt hieraus, daß die durch drei primitive Indizes bezeichneten Theta: θ_{123} usf., von entgegengesetzter Art sind wie die der Hauptreihe, die durch fünf Indizes bezeichneten wieder von derselben Art wie $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2\varrho+1}$, usf. Da die Anzahl der geraden Theta größer ist als die der ungeraden, so ergibt sich, daß alle die Thetafunktionen und nur die gerade sind, bei denen die Ordnung der Kombination, die zu ihrer Bezeichnung dient, kongruent ϱ oder $\varrho+1$ modulo 4 ist.

---

*) Vgl. *Riemann*s ges. mathem. Werke, Nachträge, herausg. von *Noether* und *Wirtinger*, S. 4.

Über einfach geordnete Mengen*).

Von Herrn *Alfred Haar* in Göttingen und Herrn *Dénes König* in Budapest.

Das eine Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Hauptsätze der Theorie der linearen Punktmengen auf die Theorie der einfach geordneten Mengen auszudehnen. Insbesondere kommen hier der *Bolzano-Weierstraß*sche**), der *Heine-Borel*sche***) und der *Cantor-Bendixson*sche†) Satz in Betracht.

Es wird aber auch gleichzeitig ein anderes Problem gelöst, das man folgendermaßen charakterisieren kann. *Cantor* hat folgenden wichtigen Satz bewiesen: Der Ordnungstypus θ der Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (einschließlich der Grenzen) ist durch folgende Eigenschaften eindeutig festgelegt††):

α) θ ist perfekt,

β) θ enthält einen in ihm überall dichten abzählbaren Ordnungstypus.

Definiert man daher die Ordnungstypen der linearen Punktmengen als Teiltypen dieses θ, so müssen alle Sätze, die sich auf eine Klasse von linearen Punktmengen beziehen, — außer der charakteristischen Eigenschaft dieser Klasse — allein aus den Eigenschaften α) und β) ableitbar sein.

*) Die gemeinschaftlich gefundenen Resultate wurden von *D. König* ausgearbeitet.

**) Über den üblichen Beweis des Satzes siehe die historischen Bemerkungen bei *Cantor*: Math. Ann. Bd. 23, S. 455.

***) *Heine*: Dieses Journal Bd. 74, S. 188. — *Borel*: Ann. de l'Éc. norm. (3) Bd. 12, S. 51 und Leçons sur la théorie des fonctions, S. 42. Vgl. auch die historischen Bemerkungen von *Lebesgue*: Bull. des Sciences Math. (2) Bd. 31, S. 129.

†) *Cantor*: Math. Ann. Bd. 21, S. 575 und Bd. 23, S. 471; Acta Math. Bd. 2 S. 414. — *Bendixson*: Acta Math. Bd. 2, S. 415.

††) Math. Ann. Bd. 46, S. 511.

Doch ist dies nicht der Weg, der bei dem Aufbau der Theorie der Punktmengen benutzt wurde. Im Gegenteil: der größte Teil der Beweise beruht auf dem Begriffe der *Strecke*. Wenn man aber θ durch die Eigenschaften α) und β) definiert, so kann man keineswegs zu jedem Intervall von θ eine reelle Zahl (ein Element von θ) eindeutig zuordnen, da θ zufolge dieser Definition in bezug auf jedes seiner (von inneren Elementen gebildeten) Elementenpaare dasselbe Verhalten aufweist; keines dieser Paare besitzt, an sich betrachtet, eine solche Eigenschaft, die ein beliebiges anderes Elementenpaar dieser Art nicht besitzen würde. Den Intervallen von θ kann eine Länge nur auf die Weise zugeordnet werden, daß man die Elemente von θ in *spezieller Form* (etwa in Dezimalbruchentwicklung) annimmt, und folglich θ nicht durch die Eigenschaften α) und β) definiert.

Die Reinheit der Methode fordert aber einen Aufbau der Theorie der linearen Punktmengen, der sich ausschließlich auf die Eigenschaften α) und β) stützt. Unsere Arbeit zeigt, daß dies in der Tat möglich ist; da wir den Begriff der Strecke gar nicht einführen, liefern unsere allgemeinen Beweise auf das Kontinuum angewendet eine Ableitung der Hauptsätze der linearen Punktmengen, die die gestellte Forderung erfüllt.

Wir stellen vor allem die Definitionen und die Erklärungen der Bezeichnungen zusammen*).

Statt „*einfach geordnete Menge*“ sagen wir schlechtweg „*Menge*“, da andere Mengen gar nicht in Betracht kommen. Die Elemente einer Teilmenge einer Menge betrachten wir immer in derselben Reihenfolge, wie in der ursprünglichen Menge, ohne dies bei jeder Gelegenheit hervorzuheben.

Eine Teilmenge der Menge M, die so beschaffen ist, daß sie alle Elemente, die einem Element a vorangehen, enthält, falls sie a enthält, nennen wir einen *Abschnitt* von M. Analog heiße eine Teilmenge *Rest* von M, wenn sie auch jedes auf a folgende Element enthält, falls sie das Element a enthält.

Die Gesamtheit der Elemente von M, die einem Element, etwa a, vorangehen, bilden nach dieser Definition einen Abschnitt von M, den

*) Vgl. außer der letztgenannten Arbeit von *Cantor* die Arbeiten von *Hausdorff*, insbesondere: Berichte d. math.-phys. Kl. d. K. Sächs. Ges. d. W., Bd. 58, S. 123 und Math. Ann. Bd. 65, S. 439. — Vgl. auch *F. Riesz*: Math. Ann. Bd. 61, S. 406.

wir mit $A(a)$ bezeichnen. In gleicher Weise sei $R(a)$ derjenige Rest von M, der alle auf a folgenden Elemente von M enthält (a selbst ist weder in $A(a)$ noch in $R(a)$ enthalten)*). Die Menge der Elemente von M, die dem Element a folgen, dem Element b $(a < b)$ aber vorangehen, bezeichnen wir mit (a,b); weder a noch b sind Elemente von (a,b). Jene Teilmenge von M, die die Elemente von (a,b) ferner die beiden Elemente a und b enthält, bezeichnen wir mit $[a,b]$. Die mit den Symbolen $A(a)$, $R(a)$, (a,b) bezeichneten Teilmengen von M mögen — mit gemeinsamem Namen — *Intervalle* von M genannt werden. Ein Intervall, das das Element c enthält, ist eine *Umgebung* dieses Elementes.

Wenn ein Element h von M so beschaffen ist, daß — wie auch das auf h folgende Element a gewählt ist — die Mächtigkeit jedes (h,a) *größer als* (und nicht gleich) $\mathfrak{m}$ ist, *so nennen wir h ein linksseitiges Verdichtungselement* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung von M.* Wenn entsprechend jedes Intervall (a,h), $(a < h)$ eine größere Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$ besitzt, so heiße h *ein rechtsseitiges Verdichtungselement* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung der Menge M.* Wenn überhaupt entweder jedes (a,h) oder jedes (h,b) $(a < h < b)$ Elemente besitzt, d. h. wenn entweder in $A(h)$ kein letztes oder in $R(h)$ kein erstes Element vorhanden ist, so nennen wir h ein *rechts-*, bzw. *linksseitiges* Verdichtungselement von M. Ein Element h von M ist also ein Verdichtungselement, wenn jede Umgebung dieses Elementes auch ein anderes Element enthält.

Ist M' eine beliebige Teilmenge von M, so kann man in derselben Weise die *rechts-*, bzw. *linksseitigen Verdichtungselemente* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung von* M' *in* M definieren; ein Element h von M heiße rechts- (bzw. links-) seitiges Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M' in M, wenn die Menge der Elemente von M', die in einem beliebigen Intervall (a,h) (bzw. (h,b)) von M enthalten sind, eine *größere* Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$ besitzt, wie auch das dem h vorangehende (bzw. auf h folgende) Element a (bzw. b) gewählt ist.

Jeder Abschnitt A und jeder Rest R von M definiert eine Zerlegung $\{M = A + R\}$ von M. Diese Zerlegung nennen wir eine *Lücke*, wenn A kein letztes und R kein erstes Element besitzt und zwar auch dann, wenn *A oder R gar kein Element enthält.* Auf diese Weise enthält jede Menge

*) Die in der *Cantor*schen Terminologie — der wir hier folgen — als Abschnitt und Rest bezeichneten Begriffe heißen bei *Hausdorff Anfangsstück* und *Endstück.* Statt $A(a)$ und $R(a)$ schreibt *Hausdorff* M^a und M_a.

M, die entweder kein erstes Element besitzt ($A=0$, $R=M$) oder kein letztes Element besitzt ($A=M$, $R=0$), mindestens eine Lücke. Man verdankt den Begriff der Lücke, der in dieser Theorie genau so wichtig ist wie der Begriff des Verdichtungselementes, den Arbeiten von *F. Hausdorff**). Man kann auch den Lücken in ähnlicher Weise wie den Verdichtungselementen eine Mächtigkeit als Ordnungsmächtigkeit zuordnen: die Lücke $\{M=A+R\}$ heiße eine rechtsseitige (bzw. linksseitige) Lücke $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M, wenn jeder Rest von A (bzw. jeder Abschnitt von R) eine größere Mächtigkeit, als $\mathfrak{m}$ besitzt.

Die Ordnung $\mathfrak{m}$ eines Verdichtungselementes bzw. einer Lücke wurde in der Weise eingeführt, daß, wenn $\mathfrak{m}$ die Definition befriedigt, auch jede kleinere Mächtigkeit diese Eigenschaft aufweist. Der Begriff der Ordnungsmächtigkeit hängt außerdem noch davon ab, ob man das Element (oder die Lücke) als rechtsseitiges oder linksseitiges Verdichtungselement (oder Lücke) betrachtet. Jeder Abschnitt ohne letztes Element (bzw. jeder Rest ohne erstes Element) definiert entweder ein Verdichtungselement, nämlich das erste (letzte) Element des entsprechenden Restes (bzw. Abschnittes), oder — falls ein solches Element nicht existiert — eine Lücke.

Eine Menge heißt *in sich abgeschlossen*, wenn sie keine Lücke besitzt**) (absolute Abgeschlossenheit).

Eine Teilmenge M' von M heiße *in M abgeschlossen*, wenn jedes Verdichtungselement von M' in M Element von M' ist (relative Abgeschlossenheit).

Eine Menge heiße *in sich dicht*, wenn jedes ihrer Elemente ein Verdichtungselement ist***).

Eine in sich dichte Teilmenge M' von M heiße *perfekt*, wenn sie sowohl in sich, wie auch in M abgeschlossen ist.

---

*) Für lineare Punktmengen hat schon *Bettazzi* einen analogen Begriff (lacuna) eingeführt. (Annali di Matematica (2) Bd. 16, S. 149.)

**) Diese Definition stimmt nicht mit der von *Cantor* für die Abgeschlossenheit gegebenen Definition (Math. Ann. Bd. 46, S. 510) überein, indem diese nur die Existenz von zwei Arten von Lücken ausschließt. Für die Teiltypen des Linearkontinuums — bei *Cantor* werden nur diese behandelt — stimmen jedoch beide Definitionen überein.

***) Von einer Teilmenge M' von M sagen wir nur dann, daß sie in sich dicht ist, wenn jedes Element von M' Verdichtungselement von M' ist. Es genügt noch nicht, daß jedes Element von M' Verdichtungselement von M ist.

Wenn eine Teilmenge R von M so beschaffen ist, daß jedes Intervall von M, das Elemente von M enthält, auch Elemente von R enthält, so sagen wir, *daß R in M überall dicht ist**).

Die erste Verallgemeinerung**) des *Weierstraß-Bolzano*schen Satzes lautet nun wie folgt:

A) *Jede unendliche Menge M besitzt entweder ein Verdichtungselement oder eine Lücke.*

Um den Satz zu beweisen, zeigen wir, daß M entweder einen Abschnitt ohne letztes Element oder einen Rest ohne erstes Element besitzt. Wenn M kein erstes Element besitzt, so ist M selbst ein Rest von M ohne erstes Element. Es sei daher a_1 das erste Element von M. Wenn es in $R(a_1)$ kein erstes Element gibt, so ist unser Satz schon bewiesen; es sei daher a_2 das erste Element von $R(a_1)$, d. h. das zweite Element von M, usf. Wäre unsere Behauptung nicht richtig, so könnte die Elementenfolge $a_1, a_2, \ldots$ nicht abbrechen, und dann bilden diese Elemente einen Abschnitt von M ohne letztes Element. Damit ist unser Satz bewiesen.

Um das so gewonnene Resultat in bestimmterer Form ausdrücken zu können, brauchen wir einen Satz, der dem bekannten *Heine-Borel*schen Satze der Punktmengentheorie entspricht. Die erste Verallgemeinerung dieses Theorems lautet folgendermaßen:

B) *Sei N eine beliebige abgeschlossene Menge und M eine Teilmenge, die sowohl in sich, wie auch in N abgeschlossen ist****).*

Wenn eine bestimmte Intervallmenge I von Intervallen i der Menge N so beschaffen ist, daß jedes Element von M in (mindestens) einem Intervalle dieser Menge liegt, so kann man aus dieser Intervallmenge I eine end-

---

*) Diese Definition stimmt nicht mit der *Hausdorff*schen überein. Nach seiner Definition kann nur eine überall dichte Menge eine *in ihr* überall dichte Teilmenge besitzen. Im Falle einer überall dichten Menge — *Hausdorff* behandelt nur solche Fälle — stimmen beide Definitionen überein.

**) Es gilt auch die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes: *Jede unendliche Teilmenge M' einer abgeschlossenen Menge M besitzt mindestens ein Verdichtungselement.* (Dieser Satz gilt auch, wenn die Abgeschlossenheit im *Cantor*schen Sinne definiert ist.) Dieses Verdichtungselement muß nicht Element von M' sein.

***) Aus dem Umstande, daß N abgeschlossen und M in N abgeschlossen ist, folgt schon, daß M in sich abgeschlossen ist.

liche Teilmenge $(i_1, i_2, \ldots i_\nu)$ *so herausgreifen, daß jedes Element von M Element eines dieser* ν *Intervalle ist**).

Bei dem Beweise dieses Satzes benutzen wir ein teilweise ähnliches Verfahren, wie es *Lebesgue***) bei dem Beweise des analogen Satzes für Punktmengen verwendet hat***).

Das Element a der Menge M heiße *erreichbar*, wenn man aus der Intervallmenge I eine endliche Teilmenge $i'_1, i'_2, \ldots i'_n$ derart herausgreifen kann, daß a und jedes diesem Elemente vorangehende Element von M in einem dieser Intervalle eingeschlossen ist; wir sagen a ist „vermöge der Intervalle $i'_1, \ldots i'_n$" erreichbar. Es ist unmittelbar klar, daß die erreichbaren Elemente einen Abschnitt von M bilden, den wir mit A bezeichnen. Die übrigen Elemente von M bilden den entsprechenden Rest B. Wir zeigen vorab, daß B kein Element enthält $(B = 0)$.

Da M keine Lücke enthält, so besitzt entweder A ein letztes Element (da $A \neq 0$ ist) oder B ein erstes Element.

Wir nehmen *erstens* an, A besäße ein letztes Element a_l und bezeichnen mit $i_1, \ldots i_n$ jene Teilmenge von I, vermöge deren a_l erreichbar ist; a_l sei etwa im Intervalle i_n enthalten. Besitzt nun B ein erstes Element b_e, so bezeichnen wir mit i_{n+1} ein Intervall von I, das b_e enthält. Dann

---

*) Dieser Satz wurde schon von *Jourdain* ausgesprochen (Messenger of Mathematics, Bd. 34, S. 67). Bei ihm ist aber, wie es Herr *Jourdain* in einer brieflichen Mitteilung jetzt in freundlicher Weise zugibt, der Satz nicht richtig, da er die Ausdrücke „closed" (abgeschlossen) und „closed with respect to N" (abgeschlossen in N) im *Cantor*schen Sinne benutzt. In der Tat, für die Mengen vom Ordnungstypus $\Omega + {}^*\Omega$ (wo Ω die erste Zahl der dritten Zahlenklasse bedeutet) kann man eine Intervallmenge von der verlangten Eigenschaft angeben, die durch ein endliches Intervallsystem dieser Art nicht ersetzbar ist. Der Ordnungstypus $\Omega + {}^*\Omega$ besitzt zwar eine Lücke, ist aber im *Cantor*schen Sinne abgeschlossen. Der *Jourdain*sche Beweis des *Heine-Borel*schen Satzes (a. a. O. S. 63) benutzt die Eigenschaft β) des Linearkontinuums (vgl. S. 16) und scheint daher auf allgemeine Mengen nicht anwendbar zu sein.

**) Leçons sur l'intégration (Paris 1904) S. 105.

***) *F. Riesz* hat auf demselben Wege den Satz B) in dem speziellen Falle bewiesen, daß

1°) N „perfekt und zusammenhängend" ist,

2°) M ein Intervall von N ist (a. a. O. S. 415). In diesem Falle wird ein wesentlicher Punkt unseres Beweises überflüssig. Durch Angabe von Beispielen kann man zeigen, daß die für M und N gemachten Voraussetzungen zur Richtigkeit des Satzes auch notwendig sind.

ist b_e vermöge der Intervalle $i_1, \ldots i_n, i_{n+1}$ erreichbar, und dies ist im Widerspruch mit der Annahme, daß kein Element von B erreichbar ist. B besitzt daher in diesem Falle sicherlich kein erstes Element. Wir zeigen nun, daß wenn $B \neq 0$ ist, a_l linksseitiges Verdichtungselement von B in N ist*). Jene Elemente von N, die irgendeinem Elemente von B folgen, bilden einen Rest B' von N; der entsprechende Abschnitt von N sei A'. B' kann in gleicher Weise wie B kein erstes Element besitzen, folglich — da N abgeschlossen ist — besitzt A' ein letztes Element. Dieses ist ein Verdichtungselement von B' in N und daher von B, also von M. Da aber M in N abgeschlossen ist, so ist dieses letzte Element von A' auch Element von M, und folglich (da es nicht Element von B' sein kann) auch Element von A, und da es Verdichtungselement von B' ist, kann es nichts anderes sein, wie das letzte Element a_l von A. Dieses ist daher in der Tat Verdichtungselement von B in N. Jede Umgebung von a_l und daher auch i_n enthält also mindestens ein Element von B; dieses Element ist also, im Widerspruch mit unserer Annahme, erreichbar.

Wir nehmen *zweitens* an, A besäße kein letzes Element. Wir zeigen in gleicher Weise wie früher, daß wenn $B \neq 0$ ist, das erste Element b_e von B Verdichtungselement von A *in* N ist. Jenes Intervall i' von I, welches b_e enthält, muß daher mindestens ein Element von A enthalten. Wenn dieses Element von A vermöge der Intervalle $i'_1, \ldots i'_n$ erreichbar ist, so ist b_e vermöge der Intervalle $i'_1, \ldots i'_n, i'$ erreichbar — im Widerspruch mit unserer Annahme, daß kein Element von B erreichbar ist.

Die Annahme $B \neq 0$ führt also in jedem denkbaren Falle zum Widerspruch: es ist daher $M = A$ und jedes Element von M ist erreichbar. Ist das letzte Element von M (ein solches muß wegen der Abgeschlossenheit von M stets existieren) vermöge der Intervalle $i_1, \ldots i_n$ erreichbar, so besitzt diese Teilmenge von I die geforderten Eigenschaften, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der soeben bewiesene Satz ist auf den Fall, daß N nicht abgeschlossen ist, nicht unmittelbar übertragbar; dies wäre nur mit einer Modifikation des Begriffes der „relativen Abgeschlossenheit“ möglich. In dem speziellen Falle aber, daß $M = N$ ist, ist jene Verallgemeinerung un-

*) Im folgenden ist es eben wichtig, daß a_l Verdichtungselement von B in N ist; daß es in M ein solches ist, ist unmittelbar klar.

mittelbar möglich. Es läßt sich nämlich durch beinahe wörtliche Wiederholung unseres letzten Beweisganges folgender Satz ableiten:

B_1) *Wenn eine Intervallmenge I von Intervallen i einer Menge M so beschaffen ist, daß jedes Element und jede Lücke von M in mindestens einem dieser Intervalle eingeschlossen ist*), so kann man eine endliche Teilmenge* $(i_1, \dots i_n)$ *von I derart angeben, daß jedes Element und jede Lücke von M in mindestens einem dieser n Intervalle enthalten ist.*

Auf Grund dieses Satzes kann man dem Satze A) folgende bestimmtere Form geben.

A_1) *Ist die Mächtigkeit von M* $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ *und**)* $\mathfrak{p} = 2\mathfrak{p}$, *so existiert in M mindestens eine Lücke oder ein Verdichtungselement von der* $\mathfrak{p}$*-ten Ordnung.*

Wäre unser Satz nicht richtig, so könnte man jedes Element und jede Lücke von M in ein Intervall einschließen, dessen Mächtigkeit nicht größer als $\mathfrak{p}$ ist. Nach unserem letzten Satze gibt es dann eine endliche Menge von Intervallen $i_1, \dots i_n$ von derselben Beschaffenheit. Bezeichnen wir die Mächtigkeit dieser Intervalle bzw. mit $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_n$, so ist — da jedes Element von M Element eines dieser Intervalle ist —

$$\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n. \tag{1.}$$

Andererseits folgt aus den Ungleichungen

$$\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_k \qquad (k = 1, \dots n)$$

durch Addition

$$n\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n$$

und folglich — da wegen $\mathfrak{p} = 2\mathfrak{p}$ auch $\mathfrak{p} = n\mathfrak{p}$ ist —

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_n.$$

Dies ist aber mit (1.) im Widerspruch und damit ist unser Satz bewiesen.

---

*) Wir treffen folgende Festsetzungen darüber, wann „eine Lücke in einem Intervall enthalten ist“:

a) Die Lücke $\{M = A + B\}$, wo A und B von Null verschieden sind, ist dann und nur dann in einem Intervall enthalten, wenn das Intervall Elemente sowohl von A als auch von B enthält;

b) die Lücke $\{M = 0 + B\}$ ist in allen Intervallen $A(x)$ und nur in diesen —

c) die Lücke $\{M = A + 0\}$ ist in allen Intervallen $R(x)$ und nur in diesen enthalten.

**) Vgl. *D. König*: Rend. del Circ. mat. di Palermo, Bd. 27, S. 339. Den Wohlordnungssatz von *Zermelo* wenden wir in dieser Arbeit nicht an; er würde die Beweise nicht vereinfachen. Das *Zermelo*sche Auswahlprinzip wird aber an mehreren Stellen benutzt.

Für den Fall, daß M keine Lücken enthält, erhalten wir das Resultat:

A_2) *Jede abgeschlossene Menge, deren Mächtigkeit größer als* $\mathfrak{m}$ *ist, besitzt mindestens ein Verdichtungselement von der Ordnung* $\mathfrak{m}$, *vorausgesetzt daß* $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}$ *ist.*

Wir gelangen nun zur Verallgemeinerung des *Cantor-Bendixson*schen Satzes, indem wir dem Beweisgang von *Lindelöf**) folgen. Der Abgeschlossenheit der Häufungs-, bzw. Kondensationselemente entspricht hier der folgende Satz:

C) *Ist* $M^{(\mathfrak{m})}$ *die Menge der Verdichtungselemente* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung der abgeschlossenen Menge* M, *so ist* $M^{(\mathfrak{m})}$ *abgeschlossen.*

Nehmen wir nämlich an, $M^{(\mathfrak{m})}$ besäße eine Lücke:

$$M^{(\mathfrak{m})} = A' + B',$$

wo also A' kein letztes, B' kein erstes Element besitzt. Sei A die Menge gebildet von jenen Elementen von M, denen noch ein Element von A' folgt, B die Menge gebildet von jenen Elementen von M, denen ein Element von B' vorangeht; es ist offenbar A ein Abschnitt, B ein Rest von M. Bezeichnen wir mit Q die Menge jener Elemente von M, die weder in A noch in B enthalten sind, so definiert die hypothetische Lücke von $M^{(\mathfrak{m})}$ die folgende Einteilung von M:

$$M = A + Q + B.$$

Hierbei ist A' Teilmenge von A, B' Teilmenge von B. A besitzt kein letztes, B kein erstes Element, da A' und B' die entsprechenden Eigenschaften besitzen. Q enthält also jedenfalls ein Element, da sonst die Zerlegung $\{M = A + B\}$ eine Lücke von M definieren würde. Besäße Q kein erstes Element, so wäre durch die Zerlegung $\{M = A + (Q + B)\}$ eine Lücke von M definiert. Sei q_1 das erste Element von Q. Ist a ein beliebiges Element von M, das q_1 vorangeht, dann besitzt — nach der Definition der Menge A — A' ein Element a', das a folgt und daher im Intervall (a, q_1) liegt; a' ist Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M, da es doch Element von $M^{(\mathfrak{m})}$ ist, und daher ist die Mächtigkeit von (a, q_1), einer Umgebung von a', größer als $\mathfrak{m}$. Dies gilt, wie auch das q_1 vorangehende Element a gewählt ist; daher wäre q_1 rechtsseitiges Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M. Dies ist aber unmöglich: jedes Element von $M^{(\mathfrak{m})}$ ist Element von A oder B

---

*) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 138, p. 697 und Acta Math., Bd. 29, S. 183.

(je nachdem es Element von A' oder B' ist) und ein Element von Q kann kein Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M sein. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme, $M^{(\mathfrak{m})}$ besitze Lücken, unhaltbar ist. —

D) *Die Menge $M^{(\mathfrak{m})}$ ist in M abgeschlossen.*

Das Element h von M möge Verdichtungselement von $M^{(\mathfrak{m})}$ sein; a sei ein beliebiges h vorangehendes, b ein h folgendes Element von M. Es enthält entweder jedes Intervall (a,h) oder jedes Intervall (h,b) Elemente von $M^{(\mathfrak{m})}$ und daher (als eine Umgebung eines Verdichtungselementes $\mathfrak{m}$-ter Ordnung) eine Teilmenge von M, deren Mächtigkeit größer als $\mathfrak{m}$ ist. Mit anderen Worten: h ist Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung, d. h. Element von $M^{(\mathfrak{m})}$. Der Satz ist damit bewiesen.

Es sei hervorgehoben, daß in den Sätzen C) und D) $\mathfrak{m}$ eine ganz willkürliche Mächtigkeit bedeutet.

Der nächste Schritt bei der Ableitung des verallgemeinerten *Cantor-Bendixson*schen Satzes wäre nun der Beweis, daß $M^{(\mathfrak{m})}$ in sich dicht ist*), und daß die Mächtigkeit, von $D = M - M^{(\mathfrak{m})}$ kleiner als eine bestimmte Mächtigkeit ist. Der *Lindelöf*sche Beweis des Satzes, daß die Menge der Kondensationspunkte eine in sich dichte Menge bildet, stützt sich aber wesentlich auf den Streckenbegriff und ist daher auf beliebige Mengen nicht übertragbar.

Es gelingt aber, auch diese Resultate auf beliebige Mengen zu übertragen, indem man statt der Eigenschaft β) (vgl. S. 16) eine entsprechende allgemeinere Eigenschaft zugrunde legt und zwar ohne den Streckenbegriff einzuführen. Wir betrachten zu diesem Zwecke eine Menge N, die eine Teilmenge R von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält, die überall dicht in N verteilt ist, und beschäftigen uns ausschließlich mit den Teilmengen M dieser Menge N**). Es kommt nur die Eigenschaft der Mächtigkeit von R in den folgenden Untersuchungen in Betracht, daß sie ihrem

*) Im Falle einer beliebigen Mächtigkeit ist der Satz gar nicht richtig (für Teile des Kontinuums gilt er schon für endliche $\mathfrak{m}$ nicht); es bilden beispielsweise die Verdichtungselemente $\aleph_0$-ter Ordnung der (abgeschlossenen) Mengen vom Ordnungstypus $\Omega\omega + 1$ („die Kondensationselemente“) eine Menge vom Typus $\omega + 1$, die also nicht in sich dicht ist.

**) Ist z. B. N das *Bernstein*sche Ultrakontinuum (s. Diss. Göttingen 1901 und Math. Ann. Bd. 61, S. 117), so ist $\aleph_\gamma = \aleph_1$.

Quadrate (und also auch ihrem Doppelten) gleich ist; dies ist allein der Grund, aus dem wir sie als ein Aleph annehmen.

Ist nun $\aleph_\gamma$ jene ausgezeichnete Mächtigkeit, so entsprechen die Verdichtungselemente von der Ordnung $\aleph_\gamma$ den Kondensationspunkten des Linearkontinuums. Es gilt der folgende Satz, der der Kern des verallgemeinerten *Cantor-Bendixson*schen Satzes ist:

E) *Sei N eine Menge, die eine in N überall dichte Teilmenge R von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält und M eine beliebige (in sich) abgeschlossene Teilmenge von N. Die Mächtigkeit der Menge $D = M - M^{(\aleph_\gamma)}$ jener Elemente von M, die keine Verdichtungselemente $\aleph_\gamma$-ter Ordnung von M sind, ist kleiner oder höchstens gleich $\aleph_\gamma$.*

Sei d ein beliebiges Element von D. Die Menge der Elemente von $M^{(\aleph_\gamma)}$, die dem Element d vorangehen, muß ein *letztes* Element c_1 haben. Wenn nämlich — wie auch das d vorangehende Element m von $M^{(\aleph_\gamma)}$ gewählt ist — jedes Intervall (m,d) mindestens ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten würde, so wäre d Verdichtungselement von $M^{(\aleph_\gamma)}$ in M und folglich wäre — nach Satz D) — d Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ und nicht von D. In gleicher Weise zeigt man, daß unter den auf d folgenden Elementen von $M^{(\aleph_\gamma)}$ ein *erstes* Element existiert, das wir etwa mit c_2 bezeichnen. Auf diese Weise bestimmt jedes Element d von D ein Intervall (c_1, c_2) von M, in dem d enthalten ist, in dem aber kein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ liegt. Wir zeigen, daß die Mächtigkeit der Menge der Elemente von M, die zwischen c_1 und c_2 liegen, $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leq \aleph_\gamma$ ist. Wir unterscheiden zu diesem Zwecke zwei Fälle:

1. Fall. M besitzt ein unmittelbar auf c_1 folgendes Element c_1'. Dann ist $\overline{\overline{[c_1', d]}} \leq \aleph_\gamma$, da widrigenfalls die abgeschlossene*) Menge $[c_1', d]$ ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten würde (Satz A_2); es enthält aber weder das Intervall (c_1', d) ein solches Element, noch sind c_1' und d Elemente von $M^{(\aleph_\gamma)}$. Es ist daher auch $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leq \aleph_\gamma$.

2. Fall. Es gibt kein Element von M, das unmittelbar c_1 folgen würde, d. h. c_1 ist linksseitiges Verdichtungselement von M. Ist also a

*) Hätte $[c_1', d]$ eine Lücke: $\{[c_1', d] = A + B\}$ so würde

$$M = (A(c_1') + A) + (B + R(d))$$

eine Lücke von M definieren, da sowohl A wie auch B Elemente enthalten müßten. Dies ist ein Widerspruch damit, daß wir M als abgeschlossen angenommen haben. Die Bezeichnungen $A(x)$, $R(x)$, $[\ldots]$ beziehen sich auf M.

ein willkürliches Element von (c_1, d), so gibt es ein Element a_1 von M derart, daß $c_1 < a_1 < a < d$. Auf diese Weise enthält (c_1, a) stets ein Element von M, also auch von R, das wir mit r bezeichnen. Es liegt daher jedes Element a von (c_1, d) in einem Intervall (r, d) der Menge N, wo r Element der Menge R ist. Die Mächtigkeit der Menge dieser Intervalle (wo d immer dasselbe bleibt) ist $\leqq \aleph_\gamma$ infolge unseren Annahmen über R. Andrerseits ist die Mächtigkeit der Menge aus jenen Elementen von (c_1, d), die im Intervall (r, d) liegen, kleiner oder höchstens gleich $\aleph_\gamma$, da sonst — infolge des Satzes A_2) — $[r, d]$ ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten müßte. Es ist daher, analog wie im ersten Falle, $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leqq \aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

In gleicher Weise können wir zeigen, daß $\overline{\overline{(d, c_2)}} \leqq \aleph_\gamma$ ist, und es ist daher in der Tat $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leqq 2\aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

Man sieht leicht, daß die zu verschiedenen Elementen d von D gehörigen Intervalle (c_1, c_2) entweder identisch sind, oder aber gar keine gemeinschaftlichen Elemente besitzen (die zu d_1 und d_2 gehörigen Intervalle sind dann und nur dann identisch, wenn (d_1, d_2) kein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthält). Jedes Intervall (c_1, c_2) enthält ein Element d von M und daher auch ein Element von R. Nach dem vorangehenden enthalten verschiedene Intervalle (c_1, c_2) verschiedene Elemente von R. Die Mächtigkeit der Menge der Intervalle (c_1, c_2) kann daher nicht größer sein als $\overline{R} = \aleph_\gamma$. Zusammenfassend können wir daher sagen, daß

a) jedes Element von D in einem Intervall (c_1, c_2) von M liegt,

b) in jedem Intervall (c_1, c_2) höchstens $\aleph_\gamma$ Elemente von D liegen,

c) die Mächtigkeit der Menge dieser Intervalle (c_1, c_2) kleiner oder gleich $\aleph_\gamma$ ist.

Die Mächtigkeit von D ist daher höchstens gleich $\aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$, und damit ist Satz E) bewiesen.

Daraus schließen wir aber unmittelbar, daß

F) $M^{(\aleph_\gamma)}$ *in sich dicht ist.*

In der Tat, jede Umgebung eines beliebigen Elementes m von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthält sicherlich noch ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$; diese Umgebung enthält nämlich — als Umgebung eines Verdichtungselementes $\aleph_\gamma$-ter Ordnung — eine Teilmenge von M, deren Mächtigkeit größer als $\aleph_\gamma$ ist, und kann daher (auch mit Ausnahme von m) nicht aus lauter Elementen von D bestehen, da — wie wir soeben gesehen haben — $\overline{\overline{D}} \leqq \aleph_\gamma$ ist.

Fassen wir nun die Sätze C), D), E) und F) zusammen, so können wir als Verallgemeinerung des *Cantor-Bendixson*schen Satzes das folgende Theorem aussprechen:

G) *Sei N eine Menge, die eine in N überall dichte Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält. Jede abgeschlossene Teilmenge M von N läßt sich aus zwei Teilen zusammensetzen, von denen der eine (P) perfekt, der andere aber (D) eine nicht größere Mächtigkeit als $\aleph_\gamma$ besitzt. Der perfekte Bestandteil besteht aus den Verdichtungselementen $\aleph_\gamma$-ter Ordnung von M in M.*

Durch Angabe von Beispielen läßt sich zeigen, daß bei Beibehaltung der Perfektheit von P die hier auftretende Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ im allgemeinen durch keine kleinere zu ersetzen ist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß wir unsere Sätze möglichst allgemein ausgesprochen haben; die Notwendigkeit der gemachten Voraussetzungen kann nämlich durch mehr oder weniger einfache Beispiele gezeigt werden*).

---

*) Die Resultate der vorliegenden Arbeit wurden in wesentlich unveränderter Form am 14. Dezember 1908 der ungar. Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf Systeme linearer partieller und linearer totaler Differentialgleichungen.

Von Herrn *L. Wilhelm Thomé* in Greifswald.

Die nachstehende Abhandlung schließt sich an die in Bd. 138 dieses Journals veröffentlichte Arbeit des Verfassers an. Der Ausgangspunkt ist dieselbe partielle Differentialgleichung erster Ordnung wie dort, nur sollen in derselben jetzt neben den Variablen, nach welchen die Differentiationen genommen sind, noch willkürliche Parameter auftreten. Diese Differentialgleichung wird hier in dem einfacheren Falle einer homogenen linearen Differentialgleichung angewandt, um aus den Integralen derselben die Integration eines integrablen Systems homogener linearer partieller Differentialgleichungen herzuleiten. Hierbei wird zum Nachweis der Existenz der Integrale ein von *Mayer* in Bd. 6 der Mathematischen Annalen S. 193—195 angegebenes Verfahren gebraucht. Nachher erfolgt die Darstellung der Integrale der zusammengehörigen beiden Systeme linearer partieller und linearer totaler Differentialgleichungen erster Ordnung direkt aus gegebenen Systemen simultaner linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

1.

Der Ausdruck

$$(1.) \qquad f(t, q_1, q_2, \dots q_m,\ v_1, v_2, \dots v_n,\ p_1, p_2, \dots p_m)$$

soll ein ganzer rationaler Ausdruck sein, in bezug auf die q und p nicht höheren als zweiten Grades, in bezug auf die v beliebigen Grades. Die Koeffizienten in f seien in einem einfach zusammenhängenden ein- oder mehrblätterigen Bereiche T über der Konstruktionsebene der komplexen Variablen t, welcher einen fixierten Punkt enthält, für den $t=0$ genommen werden

kann, einwertige und stetige analytische Funktionen von t. Es ist eine Funktion W, welche von t, den q und den v abhängt, zu bilden, die der partiellen Differentialgleichung

$$(2.) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \dots q_m, v_1, \dots v_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

genügt, wo $\frac{\partial W}{\partial q}$ an Stelle von p in f (1.) gesetzt ist, und welche m willkürliche Konstanten enthält.

Es wird nun folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen angesetzt:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \vdots \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}; \end{cases}$$

dieselben sind linear in bezug auf die q und p und enthalten die v in ganzen rationalen Ausdrücken.

Zunächst wird die allgemeine Behandlung eines solchen Systems simultaner Differentialgleichungen erörtert. Vgl. hierbei das in der Abhandlung des Verfassers in Bd. 138 Nr. 3 Gesagte. Das Gleichungssystem sei

$$(4.) \qquad \begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = l_{10} + l_{11} s_1 + l_{12} s_2 + \cdots + l_{1\lambda} s_\lambda \\ \vdots \\ \frac{ds_\lambda}{dt} = l_{\lambda 0} + l_{\lambda 1} s_1 + l_{\lambda 2} s_2 + \cdots + l_{\lambda\lambda} s_\lambda, \end{cases}$$

seine Koeffizienten l seien ganze rationale Funktionen der v mit Koeffizienten, die in dem Kreise um den Punkt t_0 als Mittelpunkt mit dem Radius R einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind. Die s_ϱ sollen in t_0 die von den v unabhängigen Werte $s_\varrho^{(0)}$ erhalten. Es wird $t - t_0 = z$, $s - s_\varrho^{(0)} = s'_\varrho$ gesetzt. Das aus (4.) hierdurch hervorgehende Gleichungssystem sei durch S bezeichnet. Aus S ergeben sich für die s'_ϱ Entwicklungen der Form $\sum_1^\infty c_n^{(\varrho)} z^n$, worin die Koeffizienten $c_n^{(\varrho)}$ eindeutig bestimmte ganze rationale Ausdrücke der v sind. Um die Konvergenz dieser Entwicklungen nachzuweisen, wird das bekannte *Cauchy*sche Verfahren auf die Differentialgleichungen des Systems S angewandt. An Stelle der von z abhängenden Faktoren der s'_ϱ und der Faktoren der Potenzen der v und an Stelle des absoluten Gliedes tritt die Reihenentwicklung von $g\left(1 - \frac{z}{R'}\right)^{-1}$, wo g ein positiver Wert

größer als der Modul jeder der genannten Funktionen auf dem Kreise um $z=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $R'<R$ ist. Für die v wird ein positiver Wert ξ größer als der Modul von v gesetzt. Der höchste Grad von ξ sei $\varkappa$; die größte Anzahl, in welcher eine der Potenzen $\xi^{\varkappa}$, $\xi^{\varkappa-1}, \ldots \xi$ vorkommt, sei τ. Der Ausdruck $\tau(\xi^{\varkappa}+\xi^{\varkappa-1}+\cdots+\xi)+1$ sei durch $L(\xi)$ bezeichnet. An Stelle der $s'_{\varrho}(\varrho=1,\ldots\lambda)$ wird die eine Variable U und dann noch bei den von U freien Gliedern in dem Gleichungssysteme S an Stelle von g der Faktor λg gesetzt. Dadurch tritt an Stelle der λ Differentialgleichungen des Systemes S folgende eine Differentialgleichung

$$\frac{dU}{dz}=\frac{\lambda g L(\xi)(U+1)}{\left(1-\frac{z}{R'}\right)}. \tag{5.}$$

Aus dieser folgt

$$U+1=e^{-\lambda g L(\xi) R' \log\left(1-\frac{z}{R'}\right)}, \quad \log 1=0. \tag{6.}$$

Hieraus ergibt sich, daß die ursprünglichen Entwicklungen der s unbedingt konvergierende Potenzreihen (mit positiven ganzzahligen Exponenten) in bezug auf die Variable $z=t-t_0$ innerhalb des ganzen Kreises um t_0 als Mittelpunkt mit dem Radius R und beliebige Werte der Variablen v sind (d. h. die Reihen der Moduln der Variablen und Koeffizienten konvergieren). Eine solche Entwicklung kann nach Potenzen jeder der Variablen z und v angeordnet und nach den Variablen in beliebiger Reihenfolge in den einzelnen Gliedern differenziert werden.

Jetzt sei in einem Kreise um t_0 als Mittelpunkt mit dem Radius R in dem Gebiete T, in welchem die Koeffizienten der Potenzen der v in (4.) einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind, eine Lösung der simultanen linearen Differentialgleichungen (4.) mit dem Anfangswerte Null in t_0

$$s_{10}, s_{20}, \ldots s_{\lambda 0}. \tag{7.}$$

Ferner werden in (4.) die Glieder $l_{\varkappa 0}$ $(\varkappa=1,\ldots\lambda)$ weggelassen, und es werden von den homogenen simultanen Differentialgleichungen Lösungen genommen

$$s_{1r}, s_{2r}, \ldots s_{\lambda r} \qquad (r=1,\ldots\lambda) \tag{8.}$$

mit folgenden Anfangswerten in t_0: Es sei der Anfangswert von $s_{rr}=1$ $(r=1,\ldots\lambda)$, von allen anderen $s_{\alpha\beta}$ gleich Null. Nun seien

$$k_1, k_2, \ldots k_{\lambda} \tag{9.}$$

willkürliche Konstanten. Dann wird folgende Lösung der simultanen linearen

Differentialgleichungen (4.) aufgestellt:

$$(10.)\qquad \begin{cases} s_1 = s_{10} + k_1 s_{11} + k_2 s_{12} + \cdots + k_\lambda s_{1\lambda}, \\ s_2 = s_{20} + k_1 s_{21} + k_2 s_{22} + \cdots + k_\lambda s_{2\lambda} \\ \vdots \\ s_\lambda = s_{\lambda 0} + k_1 s_{\lambda 1} + k_2 s_{\lambda 2} + \cdots + k_\lambda s_{\lambda\lambda}. \end{cases}$$

In dieser Lösung wird $s_r = k_r$ für $t = t_0$.

Die Lösungen s (7.), (8.) werden nun zunächst in einem Kreise in T um $t=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius R genommen. Ein Punkt t_1 innerhalb dieses Kreises sei Mittelpunkt eines zweiten Kreises in T mit dem Radius R_1. Dann werden in diesem Kreise wieder Lösungen (7.), (8.) genommen mit den dort angegebenen Anfangswerten in t_1. Für die k (9.) werden die bereits erlangten Ausdrücke der ersten Lösungen in t_1 gesetzt; dieselben sind unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen in bezug auf die v. Dann seien die Ausdrücke (10.) aufgestellt. Diese sind die Fortsetzung der betreffenden Lösungen aus dem ersten Kreise von t über das Gebiet t des zweiten Kreises für fixierte Werte der v. In gleicher Weise ist die analytische Fortsetzung der ursprünglichen Lösungen weiter in dem Gebiete T eindeutig zu bewerkstelligen. Die Funktionen s einer Lösung sind also einwertige und stetige analytische Funktionen von der Variablen t in dem Gebiete T und von den beliebig gelassenen Variablen v. In einem um den beliebigen Punkt t_0 mit dem Radius R in T geschlagenen Kreise stellen sich diese Funktionen s unter der Form (10.) dar. Dabei haben die Funktionen $s_{\alpha\beta}$ die bei (7.), (8.) angegebenen Anfangswerte in t_0 und sind Potenzreihen in bezug auf $t-t_0$ (mit positiven ganzzahligen Exponenten) mit Polynomen der beliebigen v als Koeffizienten. Diese Reihen sind in bezug auf $t-t_0$ in dem Kreise mit dem Radius R und beliebige Werte der v unbedingt konvergent. Die k in (10.) sind ganze rationale Ausdrücke von unbedingt und allenthalben konvergenten Potenzreihen der v. Alle diese Reihen werden in bezug auf die vorkommenden Variablen in beliebiger Reihenfolge differenziert durch Differentiation in den einzelnen Gliedern. Der Differentialquotient einer Funktion nach einem der v in dem ursprünglichen Gebiete t in T und in einem folgenden Gebiete t genommen, welches mit dem vorhergehenden einen gemeinsamen Teil hat, stellt die analytische Fortsetzung dieses Differentialquotienten aus dem ersten Gebiete von t in das folgende dar, weil in dem gemeinschaftlichen Gebiete von t Übereinstimmung stattfindet. —

Die Wertberechnung dieser Reihen mit vorgeschriebener Annäherung erfolgt nach den Angaben in der Abhandlung des Verfassers Bd. 96 dieses Journals Nr. 17.

2.

Nunmehr soll unter Zugrundelegung der simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (3.) ein Ausdruck W hergestellt werden, welcher der partiellen Differentialgleichung Nr. 1 (2.) genügt und m willkürliche Konstanten enthält. Hierzu kann, wie in der Abhandlung des Verfassers Bd. 138 Nr. 4 ausgeführt ist, die *Jacobi-Hamilton*sche Methode in der Modifikation von *Mayer* angewandt werden.

Es wird aber für die im folgenden zu machende Anwendung jetzt noch vorausgesetzt, daß der Ausdruck f Nr. 1 (1.) *in bezug auf die p linear und homogen sei.*

Dann enthalten die in der ersten Vertikalzeile von Nr. 1 (3.) stehenden Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \cdots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}$$

die p nicht. Aus diesen simultanen linearen Differentialgleichungen werden die Funktionen q entnommen gemäß den Angaben in Nr. 1 (7.) bis (10.), $\lambda = m$. Es wird also als Lösung von (1.) aufgestellt:

$$(2.) \qquad \begin{cases} q_1 = q_{10} + c_1 q_{11} + c_2 q_{12} + \cdots + c_m q_{1m}, \\ q_2 = q_{20} + c_1 q_{21} + c_2 q_{22} + \cdots + c_m q_{2m}, \\ \vdots \\ q_m = q_{m0} + c_1 q_{m1} + c_2 q_{m2} + \cdots + c_m q_{mm}, \end{cases}$$

wo $q_{\alpha\beta}$ an Stelle der $s_{\alpha\beta}$ in Nr. 1 (7.) (8.) gesetzt ist, c_a an Stelle von k_a Nr. 2 (9.) Ist f homogen in den q, so sind die Ausdrücke q_{10} bis q_{m0} gleich Null. Diese Funktionen $q_{\alpha\beta}$ seien in einem Kreise in T um den Nullpunkt als Mittelpunkt aufgestellt und können nach dem in Nr. 1 Gesagten über das Gebiet T fortgesetzt werden. Gemäß den Angaben in Abhandlung Bd. 138 Nr. 4 werden die Gleichungen (2.) nach den c aufgelöst. Die Determinante der Faktoren der c in (2.) sei durch Δ bezeichnet. Wenn in $\frac{\partial f}{\partial p_r}$ der Koeffizient von q_r durch a_{rr} bezeichnet wird, so ist

$$(3.) \qquad \Delta = e^P,$$

$$(4.) \qquad P = \int_0^t (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm})\, dt.$$

Das Integral P ist ein ganzer rationaler Ausdruck der v mit Koeffizienten, die in T einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind. Durch Auflösen des Systems (2.) nach den c ergebe sich

(5.) $$c_\varrho = \frac{\lambda_{\varrho 1}(q_1 - q_{10}) + \cdots + \lambda_{\varrho m}(q_m - q_{m0})}{\Delta}. \qquad (\varrho = 1, \ldots m)$$

Der Ausdruck

(6.) $$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f$$

ist hier gleich Null, daher reduziert sich der in Abh. Bd. 138 Nr. 4 genannte Ausdruck V' auf

(7.) $$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_m b_m.$$

In diesen Ausdruck sind für die c die Ausdrücke (5.) eingetragen, die b sind willkürliche Konstanten. Dann sei der hierdurch hervorgehende Ausdruck durch

(8.) $$W(t, q_1, \ldots q_m, v_1, \ldots v_n, b_1, \ldots b_m) = \Delta^{-1} U$$

bezeichnet. U ist ein linearer Ausdruck in bezug auf die q und b. Die Koeffizienten in demselben sind einwertige und stetige analytische Funktionen von t in dem Gebiete T und von den beliebigen v. Der Ausdruck W befriedigt die partielle Differentialgleichung Nr. 1 (2.). Werden in (7.) die b bis auf eines gleich Null, das letzte gleich 1 gesetzt, so erhält man die m Ausdrücke aus (5.)

(9.) $$c_\varrho = W_\varrho$$

als Integrale von Nr. 1 (2.); für $t = 0$ wird

(10.) $$W_\varrho = q_\varrho. \quad —$$

Da nach der über f Nr. 1 (1.) hier gemachten Angabe die partielle Differentialgleichung Nr. 1 (2.) eine homogene lineare in bezug auf die Ableitungen von W nach den Variablen t und q wird, so folgt schon aus elementaren Betrachtungen, nämlich aus dem bekannten Zusammenhang einer solchen partiellen Differentialgleichung mit den simultanen Differentialgleichungen (1.), daß durch Auflösen der Gleichungen (2.) nach den c Ausdrücke hervorgehen, welche die partielle Differentialgleichung Nr. 1 (1.) befriedigen. Bei einem Werte t sind die q in (5.) beliebig, da die Determinante (5.) nicht verschwindet.

Der Ausdruck $\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r}$ an (5.) gebildet, enthält hier nicht die q, sondern nur die Variablen t und v. Daher wird

(11.) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_r}\frac{\partial W_\varrho}{\partial t}.$$

Da gemäß Nr. 1 (2.)

$$\frac{\partial W_\varrho}{\partial t} = -f \tag{12.}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r} = -\frac{\partial f}{\partial q_r}. \tag{13.}$$

Die Gleichungen in der zweiten Vertikalzeile von Nr. 1 (3.) enthalten hier die q nicht und werden erfüllt durch

$$p_r = \frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r}. \qquad (r=1,\dots m) \tag{14.}$$

Gemäß (10.) wird $\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_r}$ für $t=0$ gleich 1 für $r=\varrho$ und gleich Null für $r \gtrless \varrho$.

3.

I. Es handelt sich nun im folgenden um das System partieller Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + a_{01}\dfrac{\partial z}{\partial q_1} + a_{02}\dfrac{\partial z}{\partial q_2} + \cdots + a_{0m}\dfrac{\partial z}{\partial q_m} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + a_{11}\dfrac{\partial z}{\partial q_1} + a_{12}\dfrac{\partial z}{\partial q_2} + \cdots + a_{1m}\dfrac{\partial z}{\partial q_m} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n} + a_{n1}\dfrac{\partial z}{\partial q_1} + a_{n2}\dfrac{\partial z}{\partial q_2} + \cdots + a_{nm}\dfrac{\partial z}{\partial q_m} = 0 \end{cases}$$

und das mit demselben zusammenhängende System totaler Differentialgleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} dq_1 = a_{01}\,dt + a_{11}\,dx_1 + a_{21}\,dx_2 + \cdots + a_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = a_{02}\,dt + a_{12}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + \cdots + a_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = a_{0m}\,dt + a_{1m}\,dx_1 + a_{2m}\,dx_2 + \cdots + a_{nm}\,dx_n, \end{cases}$$

worin die Koeffizienten a lineare Ausdrücke der q und ganze rationale Ausdrücke beliebigen Grades der x sein sollen mit Faktoren, welche in dem in Nr. 1 genannten Gebiete T der komplexen Variablen t einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind.

Ein integrables System (2.) *kann man in folgender Weise bilden.*

Es seien L_1 bis L_m lineare Ausdrücke der q mit Koeffizienten, welche ganze rationale Funktionen einer Variablen ω sind, und es werde das System simultaner linearer Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} dq_1 = L_1\, d\omega, \\ dq_2 = L_2\, d\omega, \\ \vdots \\ dq_m = L_m\, d\omega \end{cases}$$

angesetzt. Die q werden dadurch allenthalben einwertige und stetige Funktionen von ω und haben Ausdrücke der Art Nr. 2 (2.) mit m willkürlichen Konstanten c, die so gewählt werden können, daß in einem beliebigen Punkt ω die zugehörigen Werte q beliebig sind, da die Determinante Nr. 2 (3.) (4.) von Null verschieden ist. Dann sei für ω ein ganzer rationaler Ausdruck der x mit Koeffizienten, die in dem Gebiete T einwertige und stetige Funktionen von t sind, gesetzt. Bei einem beliebigen Punkte t_0 in T und beliebigen Werten der x können den q beliebig vorgeschriebene Werte gegeben werden. Es ist

$$(4.)\qquad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \omega}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Durch Kombination von (3.) und (4.) geht ein System wie (2.) hervor.

Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (2.) stellen sich bekanntlich in folgender Weise dar:

Die Differentialausdrücke in (1.) seien bezüglich durch $A_0(z), A_1(z)$ bis $A_n(z)$ bezeichnet, die Variablen t, x_1 bis x_n bezüglich durch λ_0, λ_1 bis λ_n, die Variablen q_1 bis q_m bezüglich durch λ_{n+1} bis λ_{n+m}. Dann bestehen die Bedingungen

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 q_r}{\partial \lambda_h \partial \lambda_i} = \frac{\partial^2 q_r}{\partial \lambda_i \partial \lambda_h}, \qquad (h, i = 0, \ldots n)$$

$$(6.)\qquad \frac{\partial q_r}{\partial \lambda_h} = a_{hr}, \quad \frac{\partial q_r}{\partial \lambda_i} = a_{ir}.$$

Nun ist

$$(7.)\qquad \frac{\partial a_{hr}}{\partial \lambda_i} = \left(\frac{\partial a_{hr}}{\partial \lambda_i}\right) + \left(\frac{\partial a_{hr}}{\partial q_1}\right) a_{i1} + \left(\frac{\partial a_{hr}}{\partial q_2}\right) a_{i2} + \cdots + \left(\frac{\partial a_{hr}}{\partial q_m}\right) a_{im} = A_i(a_{hr}),$$

daher

$$(8.)\qquad \frac{\partial a_{hr}}{\partial \lambda_i} = A_i(a_{hr}), \quad \frac{\partial a_{ir}}{\partial \lambda_h} = A_h(a_{ir}).$$

Also folgt aus (5.)

$$(9.)\qquad A_h(a_{ir}) = A_i(a_{hr}). \qquad (h, i = 0, \ldots n)$$

Für den bei (3.) (4.) angegebenen Fall gelten die Relationen (9.) *für beliebige unabhängige Werte der x und der q und für die Werte t* bei den in den a vorkommenden in dem Gebiete T einwertigen und stetigen analytischen Funktionen von t.

Diese Identität der Relationen (9.) *wird nun im folgenden für die Koeffizienten a in* (1.) (2.) *vorausgesetzt.*

Aus dieser Identität (9.) werden nun folgende Identitäten hergeleitet. Es sei

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_\varrho} = \pi_\varrho , \qquad (\varrho = 0, \ldots n+m) \tag{10.}$$

$$u_k(z) = \sum_0^{n+m\varrho} \xi_{k\varrho}\, \pi_\varrho \tag{11.}$$

gesetzt, wo die ξ nur von den Variabeln λ_0 bis λ_{n+m} abhängen; ferner sei

$$\sum_0^{n+m\varepsilon} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \pi_\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \pi_\varepsilon} \right) = [u_h u_i] \tag{12.}$$

gesetzt. Dann ist

$$[u_h u_i] = \sum_0^{n+m\varrho} \{ u_h(\xi_{i\varrho}) - u_i(\xi_{h\varrho}) \}\, \pi_\varrho . \tag{13.}$$

Nun wird

$$\xi_{k,\, n+\varrho} = a_{k\varrho} \qquad (\varrho = 1, \ldots m) \tag{14.}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_{kr} = 0 & k \leqslant r \\ \xi_{kr} = 1 & k = r \end{array} \right\} \qquad (r = 0, \ldots n) \tag{15.}$$

gesetzt. Dadurch wird

$$u_k(z) = A_k(z). \tag{16.}$$

Ferner ist

$$u_h(\xi_{i\varepsilon}) - u_i(\xi_{h\varepsilon}) = 0 \qquad (\varepsilon = n+1, \ldots n+m) \tag{17.}$$

vermöge der Identitäten (9.) und

$$u_h(\xi_{i\varepsilon}) - u_i(\xi_{h\varepsilon}) = 0 \qquad (\varepsilon = 0, \ldots n) \tag{18.}$$

gemäß (15.). Daher ist

$$[u_h u_i] = 0. \qquad (h, i = 0, \ldots n) \tag{19.}$$

Nun sei der Ausdruck

$$\sum_{n+1}^{n+m\varrho} a_{k\varrho}\, \pi_\varrho = F_k(\lambda_0, \ldots \lambda_{n+m}, \pi_{n+1}, \ldots \pi_{n+m}) \tag{20.}$$

gesetzt. Dann geht (19.) in folgende Relationen über

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_h} - \frac{\partial F_h}{\partial \lambda_i} + \sum_{n+1}^{n+m\varepsilon} \left(\frac{\partial F_h}{\partial \pi_\varepsilon} \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial F_h}{\partial \lambda_\varepsilon} \frac{\partial F_i}{\partial \pi_\varepsilon} \right) = 0. \qquad (h, i = 0, \ldots n) \tag{21.}$$

Diese sind also identisch erfüllt für die Variable z in π_{n+1} bis π_{n+m}, für die beliebigen Variablen λ_1 bis λ_{n+m} und für die Variable $\lambda_0 = t$ in dem Gebiete T.

II. Es wird im folgenden gezeigt werden, daß für das System (1.) unter der oben nach (9.) gemachten Voraussetzung m Lösungen z_1 bis z_m hervorgehen durch Auflösen eines Gleichungssystems

$$(22.)\qquad \begin{cases} q_1 = k_{10} + c_1 k_{11} + \cdots + c_m k_{1m}, \\ q_2 = k_{20} + c_1 k_{21} + \cdots + c_m k_{2m}, \\ \vdots \\ q_m = k_{m0} + c_1 k_{m1} + \cdots + c_m k_{mm} \end{cases}$$

nach den c, dessen Determinante $D = \Sigma \pm k_{11} k_{22} \cdots k_{mm}$ nicht verschwindet, wo die k_{ab} in einem Kreise um t_0 als Mittelpunkt in dem Gebiete T und beliebigen Werten x ganze rationale Ausdrücke von unbedingt konvergenten Potenzreihen (mit positiven ganzzahligen Exponenten) in bezug auf $t-t_0$ und die x sind. Es wird also

$$(23.)\qquad z_\varrho = c_\varrho. \qquad (\varrho = 1, \ldots m)$$

z_ϱ ist linear in bezug auf die q mit Koeffizienten, die, wie später nachgewiesen werden wird, die Beschaffenheit der k_{ab} haben. Nun ist

$$(24.)\qquad dz = \sum_0^{n+m \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial \lambda_\varepsilon} d\lambda_\varepsilon.$$

Hieraus entsteht vermöge des Systems (1.)

$$(25.)\qquad dz = \sum_0^{m i} \frac{\partial z}{\partial q_i} \{dq_i - (a_{0i}\, dt + a_{1i} dx_1 + \cdots + a_{ni} dx_n)\}.$$

Der Koeffizient von k_{ab} in D sei durch $\varkappa_{ab}$ bezeichnet, dann folgt aus (22.) $\frac{\partial z_\beta}{\partial q_\alpha} = \frac{\varkappa_{\alpha\beta}}{D}$, also ist die Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial z_m}{\partial q_m}$ gleich D^{-1}. Werden in (22.) die c Konstanten gleich gesetzt, so geht aus (23.) und (25.), da $dz = 0$ ist, hervor, daß die Ausdrücke (22.) das Gleichungssystem (2.) erfüllen.

Irgendeine Lösung des Systems (2.) in z_ϱ (23.) eingesetzt, macht nach (25.) $dz_\varrho = 0$, also $z_\varrho = c_\varrho$, wo c_ϱ konstant; diese Lösung ist also in (22.) für q_1 bis q_m enthalten, wo die c konstant sind.

Das System der q_1 bis q_m (22.), worin die c willkürliche Konstanten sind, bildet also die Gesamtlösung des Systems totaler Differentialgleichungen (2.). —

Die z_a (23.) haben für t in einem Kreise um t_0 als Mittelpunkt in dem Gebiete T und für beliebige x und q die Form von unbedingt konvergenten Potenzreihen (mit positiven ganzzahligen Exponenten) in bezug auf $t-t_0$, die x und q.

Eine unbedingt und für beliebige Werte von z_1 bis z_m konvergente Potenzreihe sei $\omega(z_1, z_2, \ldots z_m)$, so erfüllt ω das Gleichungssystem (1.).

Andererseits sei $\Omega(t-t_0, q_1, \ldots q_m, x_1, \ldots x_n)$ eine unbedingt konvergente Potenzreihe in bezug auf $t-t_0$ für t in einem Kreise um t_0 als Mittelpunkt in dem Gebiete T und für beliebige q und x, und es sei Ω

eine Lösung des Systems (1.). Die Variablen q werden durch (22.) ausgedrückt, wo die $c_\alpha = z_\alpha$ Lösungen von (1.) sind. Hierdurch gehe aus Ω hervor $\omega(z_1, \dots z_m, t-t_0, x_1, \dots x_n)$, wo dann ω eine unbedingt konvergente Potenzreihe in bezug auf beliebige z und x, und $t-t_0$ für Werte t in dem betreffenden Kreise. Die partiellen Ableitungen von ω nach den als unabhängig voneinander betrachteten Variablen z_α $(\alpha = 1, \dots m)$, $t-t_0 = \lambda_0$, $x_\alpha = \lambda_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots n)$ seien durch $\left(\frac{\partial \omega}{\partial z_\alpha}\right)$, $\left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda_\varrho}\right)$ bezeichnet. Dann ist

$$(26.) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_\varepsilon} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_1}\right)\frac{\partial z_1}{\partial \lambda_\varepsilon} + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_m}\right)\frac{\partial z_m}{\partial \lambda_\varepsilon} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda_\varepsilon}\right), \qquad (\varepsilon = 0, \dots n)$$

$$(27.) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_\varrho} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_1}\right)\frac{\partial z_1}{\partial q_\varrho} + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_m}\right)\frac{\partial z_m}{\partial q_\varrho}. \qquad (\varrho = 1, \dots m)$$

Werden diese Ausdrücke in das System (1.) eingesetzt, so folgt aus der ersten Gleichung $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = 0$ für unabhängige Werte x und z, da die q in (22.) beliebig sein können. Daher enthält ω nicht mehr $t-t_0$. Aus der zweiten Gleichung (1.) folgt $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right) = 0$ für unabhängige Werte der z und der übrigen x. Daher enthält ω nicht x_1 usw. Es bleibt eine unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihe der z, und es ist $\Omega = \omega(z_1, z_2, \dots z_m)$.

III. Wenn die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ in (1.) nicht homogen in den q sind, so seien die homogenen Teile derselben durch $b_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Das System

$$(28.) \qquad \begin{cases} dq_1 = b_{01}\,dt + b_{11}\,dx_1 + \dots + b_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = b_{02}\,dt + b_{12}\,dx_1 + \dots + b_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = b_{0m}\,dt + b_{1m}\,dx_1 + \dots + b_{nm}\,dx_n \end{cases}$$

wird dann durch die m Ausdrücke (22.), worin die k_{10}, k_{20} bis k_{m0} wegfallen, erfüllt, da die c willkürliche Konstanten sind, also das ursprüngliche System (2.) schon durch $q_1 = k_{10}$ bis $q_m = k_{m0}$ erfüllt worden ist.

4.

Auf das System Nr. 3 (1.) wird nun, um eine Lösung desselben zu erhalten, ein Verfahren angewandt, welches *Mayer* (Math. Annalen, Bd. 6, S. 193 bis 195) angegeben hat; vgl. auch die Darstellung des *Mayer*schen Verfahrens bei *Goursat*: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, deutsch von *Maser*, S. 165 bis 168. *Mayer* hat seine Methode für ein

allgemeineres System partieller Differentialgleichungen vermittelst der von ihm modifizierten *Jacobi-Hamilton*schen Integrationsmethode gebraucht. Hier, wo homogene lineare partielle Differentialgleichungen vorliegen, wird das Verfahren wesentlich einfacher.

I. In dem System Nr. 3 (1.) sei

$$(1.)\quad a_{r1}\frac{\partial z}{\partial q_1}+a_{r2}\frac{\partial z}{\partial q_2}+\cdots+a_{rm}\frac{\partial z}{\partial q_m}=F_r\Big(t,q_1,\ldots q_m,x_1,\ldots x_n,\frac{\partial z}{\partial q_1},\ldots\frac{\partial z}{\partial q_m}\Big)_{(r=0,\ldots n)}$$

gesetzt. Nun wird die Substitution

$$(2.)\qquad x_1=tu_1,\quad x_2=tu_2,\quad \ldots x_n=tu_n$$

vorgenommen. Die Funktion z von $t, q_1,\ldots q_m, x_1,\ldots x_n$

$$(3.)\qquad z(t,q_1,\ldots q_m,x_1,\ldots x_n),$$

die in einem Kreise der Variablen t um den Nullpunkt als Mittelpunkt eine unbedingt konvergente Potenzreihe (mit positiven ganzzahligen Exponenten) in bezug auf die Variable t und in bezug auf die beliebig gelassenen Variablen q und x sei, geht durch diese Substitution in

$$(4.)\qquad V(t,q_1,\ldots q_m,u_1,\ldots u_n)$$

über für t in demselben Kreise und beliebige Werte q und u bei der unbedingt konvergenten Potenzreihe V. Es wird

$$(5.)\qquad \frac{\partial V}{\partial u_r}=\frac{\partial z}{\partial x_r}t,\qquad (r=1,\ldots n)$$

$$(6.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x_1}u_1+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}u_n.$$

Es sei ferner der Ausdruck

$$(7.)\quad F_r\Big(t,q_1,\ldots q_m,tu_1,\ldots tu_n,\frac{\partial V}{\partial q_1},\ldots\frac{\partial V}{\partial q_m}\Big)$$
$$=H_r\Big(t,q_1,\ldots q_m,u_1,\ldots u_n,\frac{\partial V}{\partial q_1},\ldots\frac{\partial V}{\partial q_m}\Big)\qquad (r=0,\ldots n)$$

gesetzt. An Stelle des Systems Nr. 3 (1.) tritt nun das System

$$(8.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+H_0+u_1H_1+\cdots+u_nH_n=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial u_1}+tH_1=0,\ \ldots\ \dfrac{\partial V}{\partial u_n}+tH_n=0.\end{cases}$$

Der Ausdruck

$$(9.)\qquad H_0+u_1H_1+\cdots+u_nH_n$$

und die Ausdrücke

$$(10.)\qquad tH_1,\ tH_2,\ \ldots\ tH_n$$

sind linear und homogen in bezug auf $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ bis $\frac{\partial V}{\partial q_m}$ mit Faktoren, welche

linear in bezug auf die q, ganze rationale Ausdrücke in bezug auf die u sind, deren Koeffizienten als einwertige und stetige analytische Funktionen von t in dem Gebiete T auftreten. Diese Faktoren sind homogen in bezug auf die q, falls dasselbe bei den Faktoren a_{ab} in Nr. 3 (1.) der Fall ist.

II. Es sei

$$(11.)\quad \begin{cases} H_0 + u_1 H_1 + \cdots + u_n H_n = f\left(t, q_1, \ldots q_m, u_1, \ldots u_n, \dfrac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial q_m}\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial q_a} = p_a \qquad (a=1,\ldots m) \end{cases}$$

gesetzt. Die partielle Differentialgleichung

$$(12.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + f = 0$$

wird nun nach Nr. 2 behandelt, hier u, wo dort v steht. Man erhält aus Nr. 2 (9.) m Integrale

$$(13.)\qquad V = W_\varrho,\ (W_\varrho)_{t=0} = q_\varrho. \qquad (\varrho=1,\ldots m)$$

Dieselben sind linear in bezug auf die q und werden zunächst in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in dem Gebiete T bei beliebigen Werten der u genommen. Für $t=0$ sind dieselben unabhängig von den u, daher (vgl. Nr. 1 in betreff der Differentiation)

$$(14.)\qquad \left(\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i}\right)_{t=0} = 0. \qquad (i=1,\ldots n)$$

Wird also $V = W_\varrho$ in (12.) eingetragen, so folgt, da f homogen und linear in bezug auf die p ist,

$$(15.)\qquad \frac{\partial W_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial W_\varrho}{\partial q_m} = 0.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach u_i (vgl. Nr. 1)

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial}{\partial q_m}\dfrac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} \\ \qquad + \dfrac{\partial W_\varrho}{\partial q_1}\dfrac{\partial}{\partial u_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \dfrac{\partial W_\varrho}{\partial q_m}\dfrac{\partial}{\partial u_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} = 0. \end{cases}$$

Daher folgt $\left(\text{da } \dfrac{\partial f}{\partial p_a} \text{ die } p \text{ nicht enthält}\right)$

$$(17.)\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial}{\partial q_m}\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

wo $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ die partielle Ableitung von f nach u_i ist, die entsteht, wenn in $f(t_1, q_1, \ldots q_m, u_1, \ldots u_n, p_1, \ldots p_m)$ die Variabeln t, die q, die u und p als unabhängig voneinander betrachtet werden. Jetzt werden in (17.) für die q_1 bis q_m die Funktionen von t aus den Differentialgleichungen Nr. 2 (1.) gemäß Nr. 2 (2.)

genommen $\left(\text{über } p_a = \frac{\partial W_\varrho}{\partial q_a} \text{ siehe Nr. 2 bei (11.)}\right)$, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \tag{18.}$$

und hieraus mit Bezugnahme auf (14.)

$$\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u_i}\, dt = 0. \qquad (i=1,\dots n) \tag{19.}$$

III. Um nun den Zusammenhang der Differentialgleichung (12.) für $V = W_\varrho$ mit den übrigen Differentialgleichungen in dem Systeme (8.) herzustellen, werden die aus der in Nr. 3 nach (9.) gemachten Voraussetzung folgenden Identitäten Nr. 3 (21.) herangezogen:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_h} - \frac{\partial F_h}{\partial \lambda_i} + \sum_{n+1}^{n+m\varepsilon}\left(\frac{\partial F_h}{\partial \pi_\varepsilon}\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial F_h}{\partial \lambda_\varepsilon}\frac{\partial F_i}{\partial \pi_\varepsilon}\right) = 0. \qquad (i,h=0,\dots n) \tag{20.}$$

In (1.) und (7.) sind nach den Bezeichnungen aus Nr. 3 die Variablen $t = \lambda_0, x_\varrho = t u_\varrho = \lambda_\varrho\ (\varrho = 1,\dots n),\ q_\varrho = \lambda_{n+\varrho}\ (\varrho = 1,\dots m), \frac{\partial V}{\partial q_\varrho} = \pi_{n+\varrho}\ (\varrho = 1,\dots m)$. Nun folgt aus (7.) für $\varepsilon = 1,\dots n$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \lambda_\varepsilon} t = \frac{\partial H_r}{\partial u_\varepsilon} \qquad (r=0,\dots n) \tag{21.}$$

und für $\varepsilon = n+1,\dots n+m$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \lambda_\varepsilon} = \frac{\partial H_r}{\partial \lambda_\varepsilon},\quad \frac{\partial F_r}{\partial \pi_\varepsilon} = \frac{\partial H_r}{\partial \pi_\varepsilon}. \qquad (r=0,\dots n) \tag{22.}$$

Daher entsteht aus (20.)

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_h} - \frac{\partial H_h}{\partial u_i} + \sum_{n+1}^{n+m\varepsilon}\left(\frac{\partial H_h}{\partial \pi_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial H_h}{\partial \lambda_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \pi_\varepsilon}\right) = 0 \qquad (i,h=1,\dots n) \tag{23.}$$

und

$$t\frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial H_0}{\partial u_i} + \sum_{n+1}^{n+m\varepsilon}\left(\frac{\partial H_0}{\partial \pi_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial H_0}{\partial \lambda_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \pi_\varepsilon}\right) = 0. \qquad (i=1,\dots n) \tag{24.}$$

Aus (11.) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} - H_i = \frac{\partial H_0}{\partial u_i} + u_1\frac{\partial H_1}{\partial u_i} + \dots + u_n\frac{\partial H_n}{\partial u_i}, \tag{25.}$$

$\frac{\partial f}{\partial u_i}$ mit derselben Bedeutung wie in (18.). Ferner ist gemäß (7.)

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n}u_n, \tag{26.}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_r} = t\frac{\partial F_i}{\partial x_r}. \tag{27.}$$

Aus (23.) bis (27.) ergibt sich nun

$$\frac{\partial tH_i}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{n+1}^{n+m\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial \pi_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \lambda_\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \lambda_\varepsilon}\frac{\partial tH_i}{\partial \pi_\varepsilon}\right) = 0. \qquad (i=1,\dots n) \tag{28.}$$

Für V in dieser Identität wird W_ϱ gesetzt, dann werden für die λ_ε ($\varepsilon = n+1, \ldots n+m$) die Integrale Nr. 2 (2.) aus den Differentialgleichungen Nr. 2 (1.) genommen, wodurch sich für die $\pi_\varepsilon = \frac{\partial V}{\partial \lambda_\varepsilon}$ die Differentialgleichungen Nr. 2 (13.) ergeben, also

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_\varepsilon} = \frac{d\lambda_\varepsilon}{dt}, \quad -\frac{\partial f}{\partial \lambda_\varepsilon} = \frac{d\pi_\varepsilon}{dt}. \tag{29.}$$

Dadurch entsteht aus (28.)

$$\frac{d}{dt}(t H_i) - \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0. \tag{30.}$$

Demnach ist

$$t H_i = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u_i} dt. \tag{31.}$$

Dies mit (12.) verbunden gibt

$$\frac{\partial W_\varrho}{\partial u_i} + t H_i = 0. \qquad (i=1, \ldots n) \tag{32.}$$

Hier sind die q die Funktionen Nr. 2 (2.) von t. Da aber einem Werte t beliebige Werte q zugeordnet werden können bei beliebigen Werten u wegen der Willkürlichkeit der Konstanten c, so gilt die Gleichung (32.) für die Werte t in dem angenommenen Kreise und für beliebige Werte q und u. W_ϱ erfüllt also das System (8.).

5.

An Stelle der durch die Substitution Nr. 4 (2.) eingeführten Variablen u sind jetzt wieder die ursprünglichen Variablen x zu nehmen, die beliebig voneinander unabhängig und unabhängig von t sein sollen, also namentlich bei $t=0$.

Aus den simultanen linearen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \\ \vdots \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \end{cases} \tag{1.}$$

wo f der Ausdruck Nr. 4 (11.) ist, waren gemäß den Angaben in Nr. 2 (2.) (statt der v dort jetzt hier u gesetzt) die q in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in dem Gebiete T entwickelt. Diese q_r sind

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} + c_1 q_{11} + \cdots + c_m q_{1m}, \\ \vdots \\ q_m = q_{m0} + c_1 q_{m1} + \cdots + c_m q_{mm}, \end{cases} \tag{2.}$$

wo q_{ab} die in Nr. 2 bei (2.) angegebenen Anfangswerte 0 oder 1 hat. Die Funktionen q_{10} bis q_{m0} erfüllen das Gleichungssystem (1.); die Funktionen q_{1r} bis q_{mr} $(r=1,\dots m)$ sind Lösungen des Systems (1.), in welchem die Glieder die von den q unabhängig sind, wegbleiben. Jedes solches q_{ab} hat eine Entwicklung der Form

$$(3.) \qquad c_{0ab}+\sum_{\varepsilon=1}^{\infty} c_{\varepsilon ab}\, t^{\varepsilon},$$

wo die c_{0ab} Konstante in bezug auf u, die $c_{\varepsilon ab}$ Polynome der u sind. Die höchste Dimension der u in $c_{\varepsilon ab}$ ist nicht höher als ε. Dies ergibt sich in folgender Weise. In den Koeffizienten a_{ab} in dem Systeme Nr. 3 (1.) ist der Faktor eines q, bezüglich das von q freie Glied, ein Polynom der x mit Koeffizienten, die Potenzreihen in bezug auf t (mit positiven ganzzahligen Exponenten) sind. Wird $x_a=tu_a$ (Nr. 4 (2.)) gesetzt, so entsteht ein Polynom der u und jedes Produkt der u von der Dimension μ ist mit $t^{\mu}w$ multipliziert, wo w eine Potenzreihe von t. In f Nr. 4 (11.) ist der Faktor eines q, bezüglich das von q freie Glied, ein Polynom der u und jedes Produkt der u von der Dimension μ ist mit einer Potenzreihe von t multipliziert, welche wenigstens mit $t^{\mu-1}$ beginnt. Also hat dieser Faktor von q, bezüglich das von q freie Glied, eine Entwicklung der Form $\sum_0^{\infty} g_\lambda t^\lambda$, wo g_λ ein Polynom der u ist, dessen höchste Dimension nicht höher als $\lambda+1$ sein kann. Wird eine Lösung von der Form $q_\varrho=\sum_0^{\infty} h_{\varrho\varepsilon}t^{\varepsilon}$ $(\varrho=1,\dots m)$ in das System (1.) oder dasjenige, in welchem die von den q freien Glieder wegfallen, eingesetzt, so ist $h_{\varrho\varepsilon}$ ein Polynom der u, dessen höchste Dimension nicht höher als ε ist. Denn dies gilt für $h_{\varrho\varepsilon}$, wenn es für die vorhergehenden $h_{\varrho\lambda}$, $\lambda<\varepsilon$ $(\varrho=1,\dots m)$ galt; die $h_{\varrho 0}$ sind aber konstant in bezug auf u.

In den q_{ab} in (3.) wird nun jedes u mit t multipliziert, so gehen dieselben in Potenzreihen in bezug auf t über mit Faktoren, die Potenzreihen in bezug auf die x sind (alle Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten). Diese Reihen konvergieren, solange t nicht gleich Null ist, nach Nr. 1 unbedingt für t in dem angenommenen Kreise um $t=0$ und für beliebige x, und daher auch für $t=0$. Die auf diese Weise aus den q_{ab} in (3.) hervorgehenden Reihen seien durch q'_{ab} bezeichnet und können (vgl. Nr. 1) nach den Variablen in den einzelnen Gliedern differenziert werden.

Die Determinante der q (2.) $\Sigma \pm q_{11} q_{22} \cdots q_{mm}$ wird entsprechend e^P Nr. 2 (3.) (4.) gebildet. Der dort unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist hier ein Polynom der u, und jedes Produkt der u von der Dimension μ ist gemäß dem oben Gesagten mit einer Potenzreihe von t multipliziert, welche wenigstens mit $t^{\mu-1}$ beginnt. Durch die Integration nach t beginnt dann dieser Faktor mit t^{μ}. Wenn also $tu = x$ gesetzt wird, so geht ein Polynom der x hervor P' mit Potenzreihen in bezug auf t (mit positiven ganzzahligen Exponenten). $e^{P'}$ ist die Determinante $\Sigma \pm q'_{11} q'_{22} \cdots q'_{mm}$.

Das an Stelle von (2.) tretende Gleichungssystem

$$(4.) \qquad \begin{cases} q_1 = q'_{10} + c_1 q'_{11} + \cdots + c_m q'_{1m}, \\ \vdots \\ q_m = q'_{m0} + c_1 q'_{m1} + \cdots + c_m q'_{mm} \end{cases}$$

sei nach den c aufgelöst. Wird in dem Ausdruck von c_ϱ für die x wieder tu gemäß Nr 4. (2.) gesetzt, so entsteht der aus (2.) hervorgehende Ausdruck $c_\varrho = W_\varrho$ (Nr. 4 (3.)); daher erfüllt der aus (4.) hervorgehende Ausdruck von $c_\varrho = z_\varrho$ für die Werte t in dem angenommenen Kreise, zunächst solange t nicht gleich Null ist, dann wegen der Stetigkeit auch für $t = 0$, und für beliebige x und q das Gleichungssystem Nr. 3 (1.). Denn die linke Seite dieser Gleichungen geht durch die Substitution $x = tu$ Nr. 4 (2.) in die linke Seite des Systems Nr. 4 (8.) über, diese Gleichungen abgesehen von der ersten mit t^{-1} multipliziert, welches System durch $c_\varrho = W_\varrho$ erfüllt wird.

Um nun die Funktionen $c_\varrho = z_\varrho$ aus (4.) weiter zu behandeln, wird der in Nr. 3 II angegebene Zusammenhang des Systems Nr. 3 (1.) mit dem System Nr. 3 (2.) herangezogen.

6.

Das in Nr. 3 II angekündigte Gleichungssystem (22.), aus welchem die Größen (23.) $z_\varrho = c_\varrho$ hervorgehen, ist das in Nr. 5 (4.) aufgestellte für t in einem Kreise um den Nullpunkt als Mittelpunkt in dem Gebiete T. Nach dem in Nr. 3 II Gesagten sind also die q_1 bis q_m aus Nr. 5 (4.) die Lösung des Gleichungssystems Nr. 3 (2.) bei beliebigen konstanten Werten der c. Nach den Angaben aus Nr. 3 III erfüllen die q'_{10} bis q'_{m0} aus Nr. 5 (4.) das Gleichungssystem Nr. 3 (2.); die Ausdrücke der q' Nr. 5 (4.), worin die q'_{10} bis q'_{m0} weggestrichen sind, erfüllen das Gleichungssystem Nr. 3 (2.), wenn in den Koeffizienten a_{ab} desselben die von den q freien Glieder wegfallen.

Nachdem die Existenz dieses Gleichungssystems Nr. 5 (4.) *nachgewiesen ist, geschieht nun die wirkliche Herstellung desselben direkt aus dem System Nr.* 3 (2.).

I. Der in den q homogene Teil eines Koeffizienten a_{ab} Nr. 3 (2.) war in Nr. 3 III durch b_{ab} bezeichnet. Nun wird das System

$$\begin{aligned} dq_1 &= b_{01}\,dt + b_{11}\,dx_1 + \cdots + b_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 &= b_{02}\,dt + b_{12}\,dx_1 + \cdots + b_{n2}\,dx_n, \\ &\vdots \\ dq_m &= b_{0m}\,dt + b_{1m}\,dx_1 + \cdots + b_{nm}\,dx_n \end{aligned} \tag{1.}$$

behandelt; demselben genügt aus Nr. 5 (4.)

$$q_1 = q'_{1r},\quad q_2 = q'_{2r},\quad \cdots q_m = q'_{mr}. \qquad (r=1,\ldots m) \tag{2.}$$

In diesen Funktionen werden die x konstant gelassen, so sind die Funktionen (2.) eine Lösung der homogenen simultanen linearen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} dq_1 = b_{01}\,dt, \\ dq_2 = b_{02}\,dt, \\ \vdots \\ dq_m = b_{0m}\,dt. \end{cases} \tag{3.}$$

Dieses System wird nach den Angaben in Nr. 1 behandelt (hier m statt λ, hier x, wo dort v). Das System (3.) sei das System Nr. 1 (4.), wo dort die l_{10} bis $l_{\lambda 0}$ wegfallen. Es werden die Integrale Nr. 1 (8.) mit den dort angegebenen Anfangswerten in $t=0$ in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in dem Gebiete T entwickelt. Dieselben können nach den Angaben in Nr. 1 für das Gebiet T fortgesetzt werden. Man erhält für q_1 bis q_m (3.) die Gleichungen Nr. 1 (10.), in welchen die s_{10}, $s_{20}, \ldots s_{\lambda 0}$ wegfallen. Die k in diesen Ausdrücken sind hier die Größen (2.) für $t=0$ und dies sind nach Nr. 5 (4.) unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen der x. Dieselben seien durch

$$P_{1r},\quad P_{2r},\quad \ldots P_{mr} \qquad (r=1,\ldots m) \tag{4.}$$

bezeichnet. Nun wird in (1.) $t=0$ gesetzt; die Koeffizienten b_{ab} sollen dadurch in b'_{ab} übergehen. Die Ausdrücke (4.) erfüllen dann das System

$$\begin{cases} dq_1 = b'_{11}\,dx_1 + b'_{21}\,dx_2 + \cdots + b'_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = b'_{12}\,dx_1 + b'_{22}\,dx_2 + \cdots + b'_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = b'_{1m}\,dx_1 + b'_{2m}\,dx_2 + \cdots + b'_{nm}\,dx_n. \end{cases} \tag{5.}$$

Wird in den P (4.) x_2 bis x_n konstant gelassen, so sind dieselben eine Lösung der homogenen simultanen linearen Differentialgleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases} dq_1 = b'_{11}\,dx_1, \\ dq_2 = b'_{12}\,dx_1, \\ \vdots \\ dq_m = b'_{1m}\,dx_1. \end{cases}$$

Diese werden in derselben Weise, wie vorhin, nach Nr. 1 behandelt. Die Integrale Nr. 1 (8.) mit den dort angegebenen Anfangswerten in $x_1 = 0$ werden bei x_1 entwickelt; dieselben sind unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen in bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$. Die k in den Gleichungen Nr. 1 (10.) (wo die s_{10} bis s_{k0} wegfallen) sind die Ausdrücke der P (4.) für $x_1 = 0$, und dies sind unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen in bezug auf $x_2, \ldots x_n$. Dieselben seien durch

$$(7.)\qquad P'_{1r},\quad P'_{2r},\quad \ldots\ P'_{mr} \qquad (r=1,\ldots m)$$

bezeichnet. Um dieselben zu ermitteln, wird in (3.) $x_1 = 0$ gesetzt; die dadurch aus den b'_{ab} hervorgehenden Ausdrücke seien durch b''_{ab} bezeichnet. Die Ausdrücke (7.) erfüllen das System

$$(8.)\qquad \begin{cases} dq_1 = b''_{21}\,dx_2 + \cdots + b''_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = b''_{22}\,dx_2 + \cdots + b''_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = b''_{2m}\,dx_2 + \cdots + b''_{nm}\,dx_n. \end{cases}$$

Wird in den P'(7.) x_3 bis x_n konstant gelassen, so sind dieselben eine Lösung der homogenen simultanen linearen Differentialgleichungen

$$(9.)\qquad \begin{cases} dq_1 = b''_{21}\,dx_2, \\ dq_2 = b''_{22}\,dx_2, \\ \vdots \\ dq_m = b''_{2m}\,dx_2. \end{cases}$$

In dieser Weise ist fortzufahren. Zuletzt bleiben m Funktionen, die nur von x_n abhängen, zu bestimmen, welche dem System

$$(10.)\qquad \begin{cases} dq_1 = b^{(n)}_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = b^{(n)}_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = b^{(n)}_{nm}\,dx_n \end{cases}$$

genügen, wo die Größen $b^{(n)}_{n1}$ bis $b^{(n)}_{nm}$ aus den b_{n1} bis b_{nm} hervorgehen, wenn

$t = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ gesetzt sind. Die gesuchten Funktionen

(11.) $$P_{1r}^{(n-1)},\quad P_{2r}^{(n-1)},\quad \ldots\ P_{mr}^{(n-1)} \qquad (r=1,\ldots m)$$

werden, wie oben durch die Gleichungen Nr. 1 (10.) gegeben (wo die s_{10} bis $s_{\lambda 0}$ wegfallen), wo die k die Werte der P (11.) für $x_n = 0$ sind. Dies sind Konstante

(12.) $$k_1^{(r)},\quad k_2^{(r)},\quad \ldots\ k_m^{(r)}. \qquad (r=1,\ldots m)$$

Die Werte dieser Konstanten gehen aus den q'_{1r} bis q'_{mr} (2.) hervor für $t = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, und diese erfolgen aus den q_{1r} bis q_{mr} Nr. 5 (2.) für $t = u_1 = \cdots = u_n = 0$. Es ergibt sich

(13.) $$k_r^{(r)} = 1,\ k_s^{(r)} = 0 \quad r \gtrless s.$$

II. Die Determinante der Funktionen (2.) für $r = 1, \ldots m$

(14.) $$\Sigma \pm q'_{11}\, q'_{22} \cdots q'_{mm} = D$$

ist das Produkt der Determinanten der aufgestellten Fundamentalsysteme von Lösungen der homogenen simultanen linearen Differentialgleichungen (3.) (6.) (9.) usw. (10.). Diese Determinanten werden nach Nr. 2 (4.) gebildet.

In (3.) seien in den die q linear und homogen enthaltenden Ausdrücken b_{01} bis b_{0m} die Faktoren der q in der Hauptdiagonale durch β_1 bis β_m bezeichnet. Dann wird der Ausdruck

(15.) $$\int_0^t (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)\, dt$$

gebildet. In (6.) seien in den Ausdrücken b'_{11} bis b'_{1m} die Faktoren der q in der Hauptdiagonale durch β'_1 bis β'_m bezeichnet. Dann wird der Ausdruck

(16.) $$\int_0^{x_1} (\beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_m)\, dx_1$$

gebildet, usw. bis zu dem Gleichungssysteme (10.)

(17.) $$\int_0^{x_n} (\beta_1^{(n)} + \beta_2^{(n)} + \cdots + \beta_m^{(n)})\, dx_n.$$

S sei die Summe von (15.) (16.) usw. bis (17.). S ist ein ganzer rationaler Ausdruck der x mit Koeffizienten, welche in T einwertige und stetige analytische Funktionen von t sind. Für $t = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ist $S = 0$. Die Determinante (14.) ist

(18.) $$D = e^S.$$

III. Die Teile aus Nr. 5. (4.)

(19.) $$q_1 = q'_{10},\quad q_2 = q'_{20},\quad \ldots\ q_m = q'_{m0}$$

erfüllen das Gleichungssystem Nr. 3 (2.)

$$(20.)\qquad \begin{cases} dq_1 = a_{01}\,dt + a_{11}\,dx_1 + \cdots + a_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = a_{02}\,dt + a_{12}\,dx_1 + \cdots + a_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = a_{0m}\,dt + a_{1n}\,dx_1 + \cdots + a_{nm}\,dx_n. \end{cases}$$

In den q' (19.) werden die x konstant gelassen, so sind dieselben eine Lösung der simultanen linearen Differentialgleichungen

$$(21.)\qquad \begin{cases} dq_1 = a_{01}\,dt, \\ dq_2 = a_{02}\,dt, \\ \vdots \\ dq_m = a_{0m}\,dt. \end{cases}$$

Dieses System wird wie Nr. 1 (4.) behandelt. Es sind jetzt die Integrale Nr. 1 (7.) aus dem System (21.) zu entwickeln in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in dem Gebiete T. Die Integrale Nr. 1 (8.) sind bereits für das System (3.) aufgestellt. Die Fortsetzung der Integrale Nr. 1 (7.) für das Gebiet von T geschieht nach Nr. 1

Die Funktionen q' (19.) treten unter der Form Nr. 1 (10.) auf, wo die k die Ausdrücke der q' für $t=0$ sind. Diese Ausdrücke sind unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen in bezug auf die x. Dieselben seien durch

$$(22.)\qquad Q_1,\quad Q_2,\quad \cdots\ Q_m$$

bezeichnet. Wird in (20.) $t=0$ gesetzt, wodurch die a_{ab} in a'_{ab} übergehen sollen, so erfüllen die Q das System

$$(23.)\qquad \begin{cases} dq_1 = a'_{11}\,dx_1 + a'_{21}\,dx_2 + \cdots + a'_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = a'_{12}\,dx_1 + a'_{22}\,dx_2 + \cdots + a'_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = a'_{1m}\,dx_1 + a'_{2m}\,dx_2 + \cdots + a'_{nm}\,dx_n. \end{cases}$$

Hier werden x_2 bis x_n konstant gelassen; dann sind die Q eine Lösung der simultanen linearen Differentialgleichungen

$$(24.)\qquad \begin{cases} dq_1 = a'_{11}\,dx_1, \\ dq_2 = a'_{12}\,dx_1, \\ \vdots \\ dq_m = a'_{1m}\,dx_1. \end{cases}$$

Diese werden wieder nach Nr. 2 behandelt. Die Integrale Nr. 1 (7.) sind

aufzustellen; dieselben sind unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen der x_1 bis x_n. Die Integrale Nr. 1 (8.) sind für das System (6.) aufgestellt. Für die Q treten die Gleichungen Nr. 1 (10.) auf. Die k sind die Ausdrücke der Q für $x_1 = 0$, unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihen in bezug auf x_2 bis x_n. Dieselben seien durch

$$(25.) \qquad Q'_1, \quad Q'_2, \quad \dots \; Q'_m$$

bezeichnet. a'_{ab} gehe durch $x_1 = 0$ in a''_{ab} über. Die Q' (25.) genügen dem Gleichungssystem

$$(26.) \qquad \begin{cases} dq_1 = a''_{21}\,dx_2 + \dots + a''_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = a''_{22}\,dx_2 + \dots + a''_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = a''_{2m}\,dx_2 + \dots + a''_{nm}\,dx_n. \end{cases}$$

Wenn in Q' die x_3 bis x_n konstant bleiben, so sind die Q' eine Lösung der simultanen linearen Differentialgleichungen

$$(27.) \qquad \begin{cases} dq_1 = a''_{21}\,dx_2, \\ dq_2 = a''_{22}\,dx_2, \\ \vdots \\ dq_m = a''_{2m}\,dx_2. \end{cases}$$

In gleicher Weise ist fortzufahren. Es treten zuletzt die Gleichungen

$$(28.) \qquad \begin{cases} dq_1 = a^{(n)}_{n1}\,dx_n, \\ dq_2 = a^{(n)}_{n2}\,dx_n, \\ \vdots \\ dq_m = a^{(n)}_{nm}\,dx_n \end{cases}$$

auf, wo die $a^{(n)}_{ab}$ aus den a_{ab} hervorgehen, wenn $t = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ gesetzt ist. Es werden die Integrale Nr. 1 (7.) entwickelt, dieselben seien hier durch

$$(29.) \qquad S_{10}, \quad S_{20}, \quad \dots \; S_{m0}$$

bezeichnet. Die Integrale Nr. 1 (8.) sind bereits bei (10.) aufgestellt. Die gesuchten Funktionen von x_n werden durch Nr. 1 (10.) gegeben, worin die k Konstante sind. Diese Konstanten sind die Werte der q'_{10} bis q'_{m0} für $t = x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, und dies sind die Werte der q_{10} bis q_{m0} Nr. 5 (2.) für $t = u_1 = \dots = u_n = 0$. Diese sind Null. Daher sind die zuletzt gesuchten Funktionen die S_{10} bis S_{m0} (29.). Diese können aber auch Null sein. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichungen (28.) homogen in den q sind. Derselbe Fall kann auch schon vorher bei Gleichungssystemen wie (26.), (23.), (20.)

eingetreten sein. Sobald man auf ein in den φ homogenes System totaler Differentialgleichungen stößt, sind die diesem Gleichungssysteme genügenden Ausdrücke (25.), (22.), (19.) Null. Denn bei Fortsetzung des Verfahrens fallen die Integrale Nr. 1 (7.) weg, dabei zuletzt die Größen (29.).

7.

Das Gleichungssystem Nr. 3 II (22.) ist jetzt durch die Entwicklungen in Nr. 6 hergestellt für t in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in dem Gebiete T und für die Fortsetzung desselben über das weitere Gebiet von T. Die Determinante D ist Nr. 6 (18.) angegeben. Durch Auflösen dieses Gleichungssystems nach den c erfolgen die Funktionen z_ϱ ($\varrho=1,\dots m$) Nr. 3 (23.). Dieselben sind damit auch für das Gebiet T hergestellt. Der Differentialquotient von z_ϱ nach einer der Variablen q oder x in einem ersten Teile von T und in einem zweiten Teile von T, der mit dem ersten ein gemeinsames Gebiet hat, ist (siehe Nr. 1) die analytische Fortsetzung bei Übergang der komplexen Variablen t aus dem ersten Teile in den zweiten. Von z_ϱ war in den Nummern 4, 5 gezeigt für das Gebiet von t in einem Kreise um $t=0$ als Mittelpunkt in T und für beliebige q und x, daß diese Funktion das Gleichungssystem Nr. 3 (1.) erfüllt. Dies gilt nun durch die analytische Fortsetzung für das übrige Gebiet T.

Gemäß Nr. 3 II ist dann, wenn $w(z_1,\dots z_m)$ eine beliebige unbedingt und allenthalben konvergente Potenzreihe der z ist und für die z die Ausdrücke Nr. 3 (23.) eingesetzt werden, $w(z_1,\dots z_m)$ *das allgemeine Integral des Gleichungssystems Nr.* 3 (1.).

Und nach dem in Nr. 3 II bei (25.) Gesagten sind jetzt die Ausdrücke der q_α ($\alpha=1,\dots m$) Nr. 3 (22.), wenn in diesen Ausdrücken die c beliebige Konstanten sind, *für das Gebiet T überhaupt die Gesamtlösung des Gleichungssystems Nr.* 3 (2.). —

Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen.

Von Herrn *Ch. Müntz* in Charlottenburg.

Einleitung.

Die Aufgabe, durch eine vorgeschriebene geschlossene Raumkurve die Fläche vom kleinsten Inhalt zu legen, ist in präzis mathematischer Form zuerst im Jahre 1760 von *Lagrange* gestellt worden.

In einer für die Entwicklung der Variationsrechnung grundlegenden Abhandlung*) gibt *Lagrange* die Gestalt der partiellen Differentialgleichung der in Betracht kommenden Minimalflächen an und fügt hinzu: „... la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être choisi à volonté".

Seitdem ist durch eine Reihe von bedeutsamen Arbeiten der allgemeine Charakter der Minimalflächen eingehend untersucht worden; weniger dagegen die erwähnte Randwertaufgabe — häufig als Problem von *Plateau* bezeichnet —, welche längere Zeit hindurch zu den schwierigsten der mathematischen Analysis gezählt worden ist**).

In seiner „Théorie mathématique de la chaleur" (Paris 1835) gibt *Poisson* eine allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und erwähnt***) die Möglichkeit der Ausdehnung seiner Methoden auf den Fall der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung

---

*) „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies". (Oeuvres, T. I.)

**) Vgl. *Darboux*: „Théorie générale des surfaces", T. I, p. 424.

***) p. 171.

der Minimalflächen; allein er begnügt sich dort mit wenigen Andeutungen, ebenso wie in einer kurzen früheren Mitteilung*).

Im Jahre 1866 gaben gleichzeitig *Riemann* und *Weierstraß* die Lösung für den Fall einer aus geradlinigen Teilen bestehenden Begrenzung, und einige Zeit darauf verallgemeinerte Herr *Schwarz* diese Lösung für den Fall einer gemischten Kette aus solchen geradlinigen Teilen und Symmetrieebenen der Fläche.

Im Jahre 1885 führte Herr *Schwarz* in einer *Weierstraß* zu Ehren veröffentlichten Festschrift**) die Methode der sukzessiven Approximationen in die Analysis ein, die seither insbesondere durch die Arbeiten des Herrn *Picard****) zu einem der wichtigsten Hilfsmittel zur Auflösung beliebiger Gleichungen geworden ist.

Wie die hier folgenden Ausführungen dartun sollen, führt die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen wenigstens für den (*Poisson*schen) Fall nahezu ebener stetig gekrümmter Kurven — diese Worte in einem weiterhin näher präzisierten Sinne verstanden — zur wirklichen Bestimmung der von solchen Kurven begrenzten regulären Minimalflächenstücke. Das Ergebnis dieser Ausführungen läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Es sei eine räumliche geschlossene Kurve unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch die Gleichungen vorgeschrieben:

$$(A) \qquad x^* = x(t); \quad y^* = y(t); \quad z^* = \varepsilon \cdot z(t);$$

es seien hierbei $x(t), y(t), z(t)$ zunächst *analytische* Funktionen ihres

---

*) „Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données". (Dieses Journal, Bd. 7; 1832.)

**) „Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung". (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I.)

***) „Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives". (Journal de Mathématiques, s. IV, t. VI; 1890.)

„Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles". (Ibd., t. IX; 1893.)

„Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé". (Ibd., s. V, t. VI; 1900.)

„Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de *Dirichlet*". (Acta Mathematica, Bd. XXV; 1902.)

Traité d'analyse, t. II, III.

Argumentes t, ferner sei beständig

$$\text{(B)} \qquad \left(\frac{dx^*}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy^*}{dt}\right)^2 \neq 0;$$

ε sei ein unabhängiger Faktor, über dessen Kleinheit nach Belieben verfügt werden darf; alsdann läßt sich für hinreichend kleine Werte dieses Faktors ε mittels sukzessiver Approximationen die Gleichung der entsprechenden regulären Minimalfläche angeben; das gleiche Resultat bleibt noch bestehen, falls die Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen allein* eindeutig, endlich und stetig bleiben, die Bedingung (B) beständig erfüllt ist und für jede zweite Ableitung — sie möge $\psi(t)$ heißen — die Ungleichheit*) gilt:

$$|\psi(t+\tau)-\psi(t)| \leqq C\cdot|\tau|^\lambda; \qquad \tau \leqq \tau_0, \quad 0<\lambda\leqq 1,$$

worin C, τ_0, λ konstante Größen bedeuten.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Ableitung einiger Sätze aus der Potentialtheorie, namentlich mit der Aufstellung eines Systems von Ungleichheitsbedingungen für gewisse allgemeine Potentiale und ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen; der zweite Teil umfaßt die Konvergenzbeweise für die durch das Verfahren der sukzessiven Approximationen gelieferten unendlichen Reihen, ferner den Konvergenzbeweis für die Entwicklung der Lösung nach steigenden Potenzen des Parameters ε; die gleichen Methoden lassen sich unter entsprechenden, aus dem Texte leicht zu bestimmenden, Bedingungen auch auf die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varepsilon\cdot F\left(x,y,z;\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

übertragen.

Anmerkung. Als ich diese Arbeit der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin vorlegte, wußte ich, daß es Herrn

---

*) Diese Bedingung trat bei der Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen bestimmter Entwicklungen mehrfach auf; so in der Theorie der *Fourier*schen Reihen bei *Lipschitz*: „De explicatione per series trigonometricas“ (Dieses Journal, Bd. 63; 1864), ferner in der Potentialtheorie bei *Hölder*: „Beiträge zur Potentialtheorie“ (Dissertation, Stuttgart 1882) und anderen. Wir stellen uns von vornherein auf den Boden einer solchen Bedingung, um sogleich die nötige Allgemeinheit zu erlangen — vor allem werden dadurch komplizierte Untersuchungen der Differenzierbarkeitsverhältnisse vermieden —, und wollen sie nach dem zuerst angeführten Forscher bezeichnen.

Prof. *Korn* gelungen sei, den in Frage stehenden Existenzbeweis zu führen; die von Herrn *Korn* zu diesem Zwecke benutzten Hilfsmittel waren mir aber nicht bekannt.

Die betreffende Abhandlung ist seitdem publiziert worden*); da jedoch die Methode der Beweisführung in der vorliegenden Arbeit von derjenigen in der genannten Abhandlung verschieden ist, auch einige der hier gegebenen Resultate — z. B. die Möglichkeit der Entwicklung der Lösung nach Potenzen des Parameters — neu zu sein scheinen, so glaube ich den im folgenden gegebenen Ausführungen einigen selbständigen Wert beilegen zu dürfen.

Teil I.

§ 1. *Allgemeine Bemerkungen.*

Es sei T die Fläche eines um den Anfangspunkt eines rechtwinkligen ebenen Koordinatensystems als Mittelpunkt beschriebenen Kreises vom Radius 1. Für alle inneren (d. h. nicht dem Rande angehörenden) Punkte dieser Kreisfläche möge eine eindeutige endliche stetige Funktion $f(x,y)$ gegeben sein und allgemein der folgenden *Lipschitz*schen Bedingung genügen **):

$$(1.)\quad |f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| \leqq C_0\varrho^\lambda;\ 0\leqq\varrho\leqq\varrho_0;\ 0<\lambda\leqq 1,$$

worin C_0, ϱ_0, λ konstante Größen bedeuten.

Es läßt sich leicht dartun, daß infolge dieser letzten Eigenschaft der absolute Betrag der Funktion $f(x,y)$ auch bei der Annäherung an den Rand des Bereiches T immer unterhalb einer festen endlichen Schranke bleiben wird; ferner, daß $f(x,y)$ bei jeder beliebigen Annäherung an einen Randpunkt (x^*,y^*) einem eindeutig bestimmten endlichen Werte zustrebt, — diesen Wert werden wir als $f(x^*,y^*)$ gelten lassen und auf diese Weise die Funktion $f(x,y)$ als für den *ganzen* Bereich T (einschließlich des Randes) gegeben betrachten. Hierdurch wird die der Funktion $f(x,y)$ auferlegte Ungleichheitsbedingung (1.) nicht gestört.

---

*) „Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen.“ (Abhandl. der Kgl. Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl., Berlin 1909.)

**) Vgl. die Fußnote auf S. 54.

Diese Bedingung kann noch so modifiziert werden, daß sie für ein beliebiges ϱ gültig wird. Die größte Differenz zweier Funktionswerte von $f(x,y)$ im ganzen Bereiche T sei mit C_1 bezeichnet; alsdann ist für $\varrho > \varrho_0$ sicherlich

$$|f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| \leqq C_1 < \frac{C_1}{\varrho_0^\lambda}\varrho^\lambda.$$

Die größere der beiden Zahlen C_0 und $\frac{C_1}{\varrho_0^\lambda}$ möge C heißen; nunmehr ist allgemein:

$$|f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| \leqq C\varrho^\lambda; \quad 0 \leqq \varrho; \; 0 < \lambda \leqq 1.$$

Im ganzen Bereiche T ist $\varrho \leqq 2$, daher auch

$$\varrho^\lambda < 2\varrho^\mu; \; (0 < \mu < \lambda).$$

Wir können somit immer annehmen, daß im strengen Sinne $\lambda < 1$ ist.

§ 2. *Die Stellung des Problems.*

Die Eigenschaften der in § 1 angegebenen Funktion $f(x,y)$ mögen der Einfachheit halber durch folgende zwei Bedingungen allgemein ausgesprochen werden:

$$(2.) \quad |f(x,y)| < c; \quad |f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| < c\varrho^\lambda; \quad 0 \leqq \varrho; \; 0 < \lambda < 1,$$

worin c eine Konstante ist.

Wir betrachten nunmehr diejenige eindeutig bestimmte im Innern des Gebietes T reguläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(3.) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x,y),$$

welche längs des ganzen Randes verschwindet.

Über diese Lösung V sprechen wir die folgenden drei Sätze aus, deren Beweis den weiteren Inhalt dieses ersten Teiles bilden soll:

Satz I. Die Funktion V und ihre sämtlichen partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen sind für das ganze Gebiet T einschließlich des Randes endlich und stetig.

Satz II. Die Funktion V und ihre ersten Ableitungen erfüllen je eine Lipschitzsche Bedingung mit dem Exponenten 1, die zweiten Ableitungen eine solche mit dem Exponenten λ.

Satz III. Es sei

$$(4.) \quad V(x,y) = V; \; V(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) = V^{(1)}(x,y) = V^{(1)};$$
$$V^{(1)} - V = \Phi(x,y) = \Phi$$

genannt. Die Beifügung eines Striches möge irgendeine erste Ableitung kennzeichnen, die Beifügung zweier — eine zweite. Dann läßt sich eine endliche, positive, nur vom Exponenten λ abhängige Zahl m so bestimmen, daß allgemein folgendes System von Ungleichheitsbedingungen gelten wird:

$$(5.)\qquad \begin{array}{lll} |V|<mc; & |V'|<mc; & |V''|<mc; \\ |\Phi|<2mc\varrho; & |\Phi'|<2mc\varrho; & |\Phi''|<2mc\varrho^{\lambda}. \end{array}$$

Bemerkung. Die angeführten Hilfssätze sind im wesentlichen dieselben, deren sich auch Herr *Korn* in seiner oben erwähnten Abhandlung bedient; die im folgenden gegebenen Beweise scheinen mir indessen den Vorzug größerer Einfachheit zu besitzen, da sie nur die Kenntnis der *Green*schen Funktion des Einheitskreises voraussetzen.

§ 3. *Explizite Darstellung der Funktion V.*

Es möge

$$G(x,y;\ \xi,\eta)=G$$

die *Green*sche Funktion des Einheitskreises bedeuten.

Die Fortlassung jeder Angabe über das Integrationsgebiet in den weiter zu gebenden Formeln möge ein für allemal bedeuten, daß die Integration über den ganzen Bereich T zu erstrecken sei.

Die gesuchte Lösung V und ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen lassen sich mit Hilfe der *Green*schen Funktion explizit darstellen.

Es treten hierbei uneigentliche Doppelintegrale auf, die zum Teil — und zwar insofern sie zur Darstellung der *zweiten* Ableitungen dienen — nicht unbedingt konvergent sind. Solche Integrale sind dann jedesmal im folgenden Sinne zu verstehen: um den jeweiligen kritischen Punkt (x,y) als Mittelpunkt wird zunächst ein Kreis (δ) mit hinreichend kleinem Radius beschrieben, und darauf die Integration über das Gebiet $T-(\delta)$, d. h. den ganzen ursprünglichen Bereich T mit Ausschluß jenes Kreises (δ), ausgedehnt; das betrachtete uneigentliche Doppelintegral wird dann als Grenzwert der so erhaltenen endlichen Integrale definiert. Es ist demnach

$$\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\,d\eta=\lim_{(\delta)=0}\iint_{T-(\delta)} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\,d\eta$$

zu setzen usf.; durch Hinzufügung eines Sternes $*$ an den Integralzeichen

möge im folgenden bei solchen uneigentlichen Doppelintegralen an die obige Definition erinnert werden.

Die einschlägigen Formeln für die explizite Darstellung der Funktion V und ihrer ersten und zweiten partiellen Ableitungen sind in aller Ausführlichkeit in einer Arbeit des Herrn *Dini**) hergeleitet worden; sie gelten für *innere* Punkte des Bereiches T und lauten folgendermaßen:

$$(6.) \qquad V=-\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot G\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial G}{\partial y}\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{2}f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot d\xi\, d\eta.$$

Legen wir in diesen Formeln die Funktion

$$f_0(x,y)=1$$

zugrunde, so ist die Lösung einfach

$$V_0=\frac{x^2+y^2-1}{4};$$

es gelten daher die Beziehungen:

$$(7.) \qquad \frac{x^2+y^2-1}{4}=-\frac{1}{2\pi}\iint G\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$\frac{x}{2}=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{y}{2}=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial G}{\partial y}\cdot d\xi\, d\eta;$$

$$0=-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint}\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\cdot d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta, \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\cdot d\xi\, d\eta.$$

Es folgt daraus für *jede* zweite Ableitung der *Green*schen Funktion des Einheitskreises die für den weiteren Verlauf dieser Untersuchung fundamentale Identität:

$$(8.) \qquad \underset{*}{\iint} G''\cdot d\xi\, d\eta=0.$$

---

*) „Sur la méthode des approximations successives etc.“ pp. 202, 209. (Acta Mathematica, Bd. XXV; 1902.)

§ 4. *Über die Greensche Funktion.*

Es mögen an dieser Stelle einige Eigenschaften der *Green*schen Funktion G kurz zusammengestellt werden.

Wir bezeichnen mit (x, y) die Lage des Pols der *Green*schen Funktion, mit (ξ, η) die des variablen Aufpunktes, mit (ξ', η') die des Spiegelbildes von (ξ, η) in bezug auf die Kreisperipherie des betrachteten Bereiches T. Es sei ferner r die vom Pol aus genommene Entfernung bis zum Aufpunkt, r' diejenige vom Pol bis zum Spiegelbild des Aufpunktes; θ möge den Winkel zwischen dem Vektor r und der positiven Richtung der X-Achse bezeichnen, θ' den entsprechenden Winkel für den Vektor r'; schließlich möge die Entfernung vom Mittelpunkte bis zum Aufpunkt ω heißen.

Es ist demnach:

$$(9.) \qquad \xi' = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2};$$

$$r = \left|\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right|, \quad r' = \left|\sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2}\right|;$$

$$\cos\theta = \frac{\xi-x}{r}, \quad \cos\theta' = \frac{\xi'-x}{r'};$$

$$\omega = \left|\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right|,$$

und es bleibt beständig

$$(10.) \qquad r' \geqq r; \quad \omega r' \geqq r.$$

Die *Green*sche Funktion des Einheitskreises ist:

$$(11.) \qquad G = \log\frac{\omega r'}{r}.$$

Ferner ist:

$$(12.) \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{r} - \frac{\cos\theta'}{r'}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{r} - \frac{\sin\theta'}{r'};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} = \frac{\sin 2\theta}{r^2} - \frac{\sin 2\theta'}{r'^2},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}.$$

Aus diesen Formeln folgt allgemein:

$$(13.) \qquad G \geqq 0; \quad |G'| \leqq \frac{2}{r}; \quad |G''| \leqq \frac{2}{r^2},$$

woraufhin die Endlichkeit der untersuchten Funktionen im Innern des Bereiches T dargetan werden kann.

§ 5. *Auffindung oberer Schranken für* $|V|$, $|V'|$, $|V''|$.

Es folgt aus den Beziehungen (7.) und (8.):

$$(14.)\quad \left|\frac{1}{2\pi}\iint G\,d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{4};\quad \left|\frac{1}{2\pi}\iint G'\cdot d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{2};\quad \left|\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} G''\cdot d\xi\,d\eta\right| = 0.$$

Die Voraussetzungen für die gegebene Funktion $f(x,y)$ sind, wie hier erinnert werden mag:

$$(15.)\quad |f(x,y)| < c,\quad |f(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)-f(x,y)| < c\varrho^{\lambda};$$
$$0 \leqq \varrho,\quad 0<\lambda<1.$$

Es ist nun:

$$(16.)\qquad V = -\frac{1}{2\pi}\iint f(\xi,\eta)\cdot G\cdot d\xi\,d\eta,$$
$$|V| < c\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\iint G\cdot d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{4}c,$$

womit eine obere Schranke für $|V|$ gefunden ist.

Wir dürfen ferner schreiben:

$$(17.)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{f(x,y)}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta - \frac{1}{2\pi}\iint [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta.$$

Das erste der beiden hier auftretenden Integrale*) ist leicht abzuschätzen; es ist:

$$(18.)\quad \left|-\frac{f(x,y)}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| < c\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| \leqq \frac{1}{2}c.$$

Zur Abschätzung des zweiten betrachteten Integrals ersetzen wir die einzelnen Faktoren durch die Höchstbeträge ihrer absoluten Werte, führen Polarkoordinaten mit dem Pol (x,y) als Mittelpunkt ein und nehmen statt jedes Vektors nach dem Rande den größtmöglichen Vektor 2; wir erhalten dann:

$$(19.)\quad \left|-\frac{1}{2\pi}\iint [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\frac{\partial G}{\partial x}\cdot d\xi\,d\eta\right| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} cr^{\lambda}\cdot\frac{2}{r}\cdot r\,dr < 8c.$$

Die Zusammenfassung der beiden letzten Resultate ergibt eine obere Schranke für $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$, welche aus Gründen der Analogie auch für $\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|$ gültig bleibt; wir haben somit

$$(20.)\qquad |V'| < \frac{17}{2}c.$$

Es sei jetzt an die Fundamentalformel (8.) erinnert; wir dürfen schreiben:

---

*) Diese Abkürzung für „Doppelintegral“ möge gestattet werden.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{2} f(x,y) - \frac{1}{2\pi} \iint_{*} [f(\xi,\eta) - f(x,y)] \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot d\xi\, d\eta,$$

(21.)
$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| < \frac{1}{2} c + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 c r^{\lambda} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot r\, dr < \frac{1}{2} c + \frac{4}{\lambda} c < \frac{9}{2\lambda} c;$$

die gleiche Schranke gilt für $\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|$ und a fortiori für $\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right|$, es ist also allgemein:

(22.)
$$|V''| < \frac{9}{2\lambda} c.$$

§ 6. *Beweis der Hilfssätze I und II für V und V'.*

Es möge neben dem einen Pol (x,y) ein beliebiger zweiter betrachtet werden: $(x + \varrho\cos\alpha,\ y + \varrho\sin\alpha)$. Aus den gefundenen Schranken für die absoluten Beträge der ersten und zweiten Ableitungen der Funktion V folgt ohne weiteres*):

(23.)
$$|V(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) - V(x,y)| < 17\, c\varrho;$$
$$|V'(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) - V'(x,y)| < \frac{9}{\lambda} c\varrho.$$

Diese Ungleichheiten enthalten den auf die Funktionen V und V' bezüglichen Teil des Satzes II (vgl. S. 56); nach den allgemeinen Bemerkungen des § 1 ist nunmehr für diese Funktionen auch das reguläre Verhalten auf dem Rande gesichert, womit der entsprechende Teil des Satzes I bewiesen ist. Schwieriger gestaltet sich die Untersuchung für die zweiten Ableitungen V'', zu der wir jetzt übergehen müssen.

§ 7. *Abschätzung der Differenzen* $G''(x^{(1)},y^{(1)};\ \xi,\eta) - G(x,y;\ \xi,\eta)$.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$x + \varrho\cos\alpha = x^{(1)},\ y + \varrho\sin\alpha = y^{(1)};$$

die Bezeichnungen für den Pol $(x^{(1)},y^{(1)})$ mögen mit dem Index (1) versehen werden und sonst durchweg mit denjenigen für (x,y) übereinstimmen; insbesondere schreiben wir:

$$G(x^{(1)},y^{(1)};\ \xi,\eta) = G^{(1)};\ \left|\sqrt{(x^{(1)}-\xi)^2 + (y^{(1)}-\eta)^2}\right| = r^{(1)} = r_1 \quad \text{usf.}$$

Wir haben nun:

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x^{(1)}} = \frac{\partial G^{(1)}}{\partial x};\ \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^{(1)2}} = \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} \text{ usf.},$$

und können daher schreiben:

(24.)
$$\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2\theta_1'}{r_1'^2},$$

*) ϱ ist im folgenden immer positiv zu nehmen.

$$\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \left(\frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2\theta}{r^2}\right) - \left(\frac{\cos 2\theta'_1}{r_1'^2} - \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}\right).$$

Es ist:

$$(25.)\quad \frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} = \frac{1}{r^2 r_1^2}\{-(r_1-r)(r_1+r)(2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta_1) + (r_1-r)(r_1+r) + (r_1\cos\theta_1 - r\cos\theta)(2r_1\cos\theta_1 + 2r\cos\theta)\}.$$

Nun bilden die drei Vektoren r, r_1, ϱ ein Dreieck; es ist daher:

$$|r_1 - r| \leqq \varrho;\ |r_1\cos\theta_1 - r\cos\theta| = |\varrho\cos\alpha| \leqq \varrho;$$

daraus folgt:

$$(26.)\quad \left|\frac{\cos 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\cos 2\theta}{r^2}\right| \leqq \frac{1}{r^2 r_1^2}\cdot 7\varrho(r+r_1) = 7\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right),$$
$$\left|\frac{\cos 2\theta'_1}{r_1'^2} - \frac{\cos 2\theta'}{r'^2}\right| \leqq \frac{1}{r'^2 r_1'^2}\cdot 7\varrho(r'+r'_1) = 7\varrho\cdot\frac{1}{r'r'_1}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_1}\right),$$

und zuletzt, da beständig $r' \geqq r$, $r'_1 \geqq r'$ bleibt, durch Zusammenfassung dieser Resultate:

$$(27.)\quad \left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right| \leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right).$$

Die so gefundene Schranke gilt ohne weiteres auch für die endlichen Differenzen der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$; zur Feststellung des gleichen Ergebnisses auch für die gemischte zweite Ableitung $\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}$ bedarf es jedoch einer besonderen Untersuchung. Es ist:

$$(28.)\quad \frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\right) - \left(\frac{\sin 2\theta'_1}{r_1'^2} - \frac{\sin 2\theta'}{r'^2}\right);$$

wir schreiben:

$$(29.)\quad \frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} = \frac{1}{r^2 r_1^2}\{-(r_1+r)(r_1-r)(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta) + 2r_1 r\sin(\theta_1-\theta) + (r_1\cos\theta_1 - r\cos\theta)(2r_1\sin\theta_1 + 2r\sin\theta)\}.$$

Es ist aber $\left|\frac{1}{2}r_1 r\sin(\theta_1-\theta)\right|$ nichts anderes, als der Inhalt des aus den Strecken r_1, r, ϱ gebildeten Dreiecks; die auf ϱ gefällte Höhe dieses Dreiecks ist nicht größer, als jede der beiden Nebenseiten r_1, r; es ist daher

$$|2r_1 r\cdot\sin(\theta_1-\theta)| \leqq \varrho(r_1+r)$$

und ferner, wie vorhin,

$$|r_1 - r| \leqq \varrho;\ |r_1\cos\theta_1 - r\cos\theta| = |\varrho\cos\alpha| \leqq \varrho;$$

so erhalten wir:

$$(30.)\qquad \left|\frac{\sin 2\theta_1}{r_1^2}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right|\leqq 7\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right),$$

und ganz analog dem früheren Ergebnisse:

$$(31.)\qquad \left|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right|\leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{rr_1}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right).$$

§ 8. *Abschätzung der Differenzen* $V''(x^{(1)},y^{(1)})-V''(x,y)$.

Es möge

$$V(x^{(1)},y^{(1)})=V^{(1)}\ \text{usf.}$$

geschrieben werden. Wir haben*):

$$(32.)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}&=\frac{1}{2}f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\,d\xi\,d\eta,\\ \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2}&=\frac{1}{2}f(x^{(1)},y^{(1)})-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta.\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Differenz der beiden ersten Glieder der rechten Seiten ergibt hier sofort:

$$(33.)\qquad \left|\frac{1}{2}f(x^{(1)},y^{(1)})-\frac{1}{2}f(x,y)\right|<\frac{1}{2}c\varrho^{\lambda}.$$

Wir haben außerdem noch die Differenz der beiden Integrale

$$(34.)\qquad D''=-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(\xi,\eta)\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\,d\eta$$

zu untersuchen. Infolge der Fundamentalbeziehung (8.) haben wir:

$$(35.)\qquad -\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(x,y)\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta=0,\quad -\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint} f(x^{(1)},y^{(1)})\cdot\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\,d\eta=0.$$

Es darf demnach geschrieben werden:

$$(36.)\qquad D''=-\frac{1}{2\pi}\underset{*}{\iint}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\,d\eta.$$

Wir zerlegen jetzt das Integrationsgebiet T in folgende vier Teile:

1) einen Kreis vom Radius $\frac{\varrho}{2}$ um den Pol (x,y): er heiße (ϱ);
2) einen gleich großen Kreis um den Pol $(x^{(1)},y^{(1)})$: dieser sei (ϱ_1);
3) das Segment, für welches $r\leqq r_1$ ist, unter Ausschluß aller nach (ϱ) fallenden Punkte: es heiße (τ);

---

*) In welchem Sinne die hier gebrauchten uneigentlichen Integrale zu verstehen sind, ist bereits ausführlich angegeben (vgl. S. 57).

4) das entsprechende Segment mit $r_1 \leqq r$, unter Ausschluß aller Punkte von (ϱ_1): dieses sei (τ_1).

Die Kreise (ϱ) und (ϱ_1) berühren sich; die Gebietsteile (τ), (τ_1) sind durch die gemeinschaftliche Tangente dieser Kreise voneinander getrennt.

Es könnte vorkommen, daß nur Teile der Kreise $(\varrho), (\varrho_1)$ dem Bereiche T angehören: dann mögen diese Teile allein schon $(\varrho), (\varrho_1)$ heißen.

Wir schreiben jetzt die zu untersuchende Formel (36.) in folgender Weise:

$$(37.)\quad D'' = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)+(\varrho)} [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\Big(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big)\cdot d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)} [f(\xi,\eta)-f(x^{(1)},y^{(1)})]\cdot\Big(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big)\cdot d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)} [f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)]\cdot\Big(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big)\cdot d\xi\, d\eta\,.$$

Es möge zunächst das erste Integral der rechten Seite zerlegt und abgeschätzt werden; die Untersuchung des zweiten Integrals verläuft ganz analog und liefert die gleiche Schranke.

Es ist im ganzen Gebietsteile (τ) beständig:

$$\frac{\varrho}{2}\leqq r\leqq r_1,\quad |f(\xi,\eta)-f(x,y)|<cr^\lambda,$$
$$\Big|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|\leqq 14\varrho\cdot\frac{1}{r\,r_1}\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\Big)\leqq 28\varrho\cdot\frac{1}{r^3},$$

woraus nach Einführung von Polarkoordinaten um den Pol (x,y) als Mittelpunkt gefolgert werden kann:

$$(38.)\quad \Big|-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\Big(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big)\cdot d\xi\, d\eta\Big|$$
$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{\varrho}{2}}^{2} cr^\lambda\cdot\frac{28\varrho}{r^3}\cdot r\,dr<\frac{56}{1-\lambda}c\varrho^\lambda.$$

Diese Ungleichheit läßt den Grund dafür erkennen, weshalb es von vornherein zweckmäßig erschien, den Exponenten λ im strengen Sinne kleiner als 1 vorauszusetzen; durch das Auftreten von logarithmischen Ausdrücken an dieser Stelle würde sich der Exponent 1 nicht aufrechterhalten lassen.

Im Gebietsteile (ϱ) ist beständig

$$\Big|\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\Big|\leqq\frac{2}{r_1^2}\leqq\frac{2}{r^2};\quad \Big|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|\leqq\frac{2}{r^2};$$

wir haben daher:

$$(39.)\qquad \left|-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\varrho)}[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\cdot\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta\right|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\varrho}{2}} cr^\lambda\cdot\frac{4}{r^2}\cdot r\,dr<\frac{4}{\lambda}c\varrho^\lambda.$$

Der absolute Betrag der Summe der beiden ersten Integrale auf der rechten Seite der Formel (37.) ist also kleiner als

$$(40.)\qquad \left(\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda}\right)\cdot c\varrho^\lambda.$$

Es bleibt noch das letzte Integral der angegebenen Formel abzuschätzen, d. h.

$$-\frac{f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)d\xi\, d\eta.$$

Nach Voraussetzung ist

$$(41.)\qquad |f(x^{(1)},y^{(1)})-f(x,y)|<c\varrho^\lambda;$$

es gilt nun zu zeigen, daß das uneigentliche Doppelintegral

$$(42.)\qquad A=\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\left(\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\cdot d\xi\, d\eta$$

dem absoluten Betrage nach beständig unterhalb einer festen Schranke liegen muß.

Die Gebietsteile $(\tau_1)+(\varrho_1)$ und $(\tau)+(\varrho)$ bilden zusammen den ganzen Bereich T; es ist daher nach der Formel (8.):

$$(43.)\qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)+(\varrho)}\frac{\partial^2 G^{(1)}}{\partial x^2}\cdot d\xi\, d\eta,$$

folglich:

$$(44.)\qquad A=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau)+(\varrho)}\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}d\xi\, d\eta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(\tau_1)+(\varrho_1)}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}d\xi\, d\eta;$$

hier sind keine uneigentlichen Elemente mehr vorhanden, A ist somit auf jeden Fall endlich.

Die bisher gewonnenen Resultate (33.), (38.), (39.), (41.), (44.) ergeben zusammengefaßt:

$$(45.)\qquad \left|\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|<\left\{\frac{1}{2}+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda}+|A|\right\}\cdot c\varrho^\lambda.$$

Wäre aus den Formeln (32.) von vornherein eine Gleichung für A abgeleitet worden, so würde man ebenso erhalten:

$$(46.) \qquad |A|\, c\varrho^{\lambda} < \left(\frac{1}{2}+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda}\right)c\varrho^{\lambda}+\left|\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|.$$

Da nun A garnicht von der besonderen Beschaffenheit der Funktion $f(x, y)$, und somit auch $V(x, y)$, abhängt, und die letzte Ungleichheit für alle Funktionen der betrachteten Klasse gilt, so können wir daraus die gesuchte obere Schranke für $|A|$ gewinnen. Nehmen wir beispielsweise

$$\bar{f}(x, y)=\frac{1}{8}\,c(x^2+y^2),$$

so ist

$$\overline{V}(x, y)=\frac{1}{128}\,c(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+1),$$

und ferner:

$$|\bar{f}(x, y)|<c; \quad |\bar{f}(x^{(1)}, y^{(1)})-\bar{f}(x, y)|<\frac{1}{2}\,c\varrho<c\varrho^{\lambda};$$

$$\left|\frac{\partial^2 \overline{V}^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}\right|<\frac{1}{2}\,c\varrho<c\varrho^{\lambda};$$

wir dürfen aus diesem Falle durch Einsetzung der gewonnenen speziellen Werte in die Beziehung (46.) schließen:

$$(47.) \qquad |A|<\frac{3}{2}+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda},$$

woraus nunmehr *allgemein* folgt:

$$(48.) \qquad \left|\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|<\left(2+\frac{224}{1-\lambda}+\frac{16}{\lambda}\right)c\varrho^{\lambda}.$$

Die gleiche Schranke gilt für die endlichen Differenzen jeder zweiten partiellen Ableitung von V überhaupt.

Es ist somit allgemein:

$$(49.) \quad |V''(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)-V''(x, y)|<\left(2+\frac{224}{1-\lambda}+\frac{16}{\lambda}\right)c\varrho^{\lambda}.$$

§ 9. *Folgerungen. Beweis der Hauptsätze und Verallgemeinerung.*

Die zweiten Ableitungen V'' der untersuchten Lösung V erfüllen, wie zuletzt bewiesen, im Innern des Bereiches T eine *Lipschitz*sche Bedingung mit dem Exponenten λ. Nach den allgemeinen Bemerkungen des § 1 verhalten sie sich daher auch auf dem Rande regulär.

Die beiden ersten Hauptsätze dieses vorbereitenden Teiles sind somit in vollem Umfange bewiesen.

Zum Beweise des dritten und letzten dieser Sätze stellen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen:

$$(50.)\qquad \begin{aligned} &|V|<\frac{1}{4}c; \qquad |V'|<\frac{17}{2}c; \qquad |V''|<\frac{9}{2\lambda}c;\\ &|\Phi|<17\,c\varrho; \quad |\Phi'|<\frac{9}{\lambda}c\varrho; \quad |\Phi''|<\Big(2+\frac{224}{1-\lambda}+\frac{16}{\lambda}\Big)c\varrho^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir brauchen nur zu setzen:

$$(51.)\qquad m=1+\frac{112}{1-\lambda}+\frac{8}{\lambda},$$

so ist dann, wie verlangt worden,

$$(52.)\qquad \begin{aligned} &|V|<mc; \qquad |V'|<mc; \qquad |V''|<mc;\\ &|\Phi|<2mc\varrho; \quad |\Phi'|<2mc\varrho; \quad |\Phi''|<2mc\varrho^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir fügen nunmehr hinzu, daß die angegebenen drei Sätze ohne weiteres vom Einheitskreise auf jedes Gebiet übertragen werden können, für welches die konforme Abbildung auf den Kreis durch die Funktionen

$$X=X(x,y); \quad Y=Y(x,y)$$

vermittelt wird, wenn diese Funktionen nebst ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen sich auch auf dem Rande regulär verhalten, die (den bekannten *Cauchy-Riemann*schen Bedingungen genügenden) ersten Ableitungen nicht alle gleichzeitig verschwinden und die zweiten Ableitungen je eine *Lipschitz*sche Bedingung erfüllen. Insbesondere gilt also das System (52.) als Folge der Voraussetzungen (2.) für alle von *einer* geschlossenen analytischen Kurve begrenzten ebenen Bereiche. Die entsprechende Konstante m wird dann auch von der Begrenzung abhängen, auf alle Fälle aber endlich bleiben.

Bemerkung. Aus der geometrischen Interpretation einiger allgemeinen Sätze der Herren *Dini**) und *Fatou***) geht hervor, daß die verlangten Eigenschaften denjenigen einfach zusammenhängenden geschlossenen ebenen Bereichen zukommen, deren Randkurve durch die Gleichungen

$$x^*=x(t), \quad y^*=y(t)$$

gegeben ist, wenn die Funktionen $x(t), y(t)$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen für den ganzen Rand eindeutig, endlich und stetig bleiben, die ersten Ableitungen nirgends gleichzeitig verschwinden und die zweiten Ableitungen je eine *Lipschitz*sche Bedingung erfüllen. Die weiteren Untersuchungen werden daher für solche Bereiche gelten.

---

*) A. a. O.

**) „Séries trigonométriques et séries de Taylor", vgl. S. 363. (Acta Mathematica, Bd. XXX; 1906.)

Teil II.

§ 1. *Die Stellung des Problems.*

Für jeden Punkt einer geschlossenen analytischen*) Kurve in der xy-Ebene:

$$x^* = x(t),\ y^* = y(t)$$

sei eine analytische**) Funktion

$$z^* = z(t)$$

vorgeschrieben, die als Funktion der Randstelle (x^*, y^*) eindeutig sein möge; es sei ferner beständig

$$\left(\frac{dx^*}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt}\right)^2 \neq 0.$$

Deuten wir z^* als dritte rechtwinklige Raumkoordinate, so erhalten wir eine geschlossene analytische Raumkurve, deren Projektion auf die xy-Ebene keine vielfachen Punkte enthält.

Wir betrachten jetzt ein ganzes System solcher Kurven, welches wir dadurch erhalten, daß der Funktion z^* ein konstanter Faktor ε beigefügt wird; für hinreichend kleine Werte dieses Parameters ε kommt die entsprechende Kurve beliebig nahe an die xy-Ebene heran.

Wir versuchen durch je eine solche Kurve die im Falle ihrer Existenz eindeutig bestimmte reguläre Minimalfläche zu legen, und zwar soll zu diesem Zwecke die Koordinate $\bar{z}$ als reguläre Funktion der Stelle (x, y) innerhalb des von der gegebenen ebenen Projektion der Randkurve begrenzten Gebietes T explizite dargestellt werden; diese Koordinate wird auch eine Funktion von ε sein, wir nennen sie εz.

Die gesuchte Lösung εz muß im Gebiete T der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen genügen. Es ist also

$$(1.)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] = 0$$

und auf dem Rande

$$(1^*.)\qquad z = z^*.$$

§ 2. *Einführung der Grundfunktion z_0.*

Es sei z_0 diejenige reguläre Potentialfunktion des Bereiches T, welche auf dem Rande mit z übereinstimmt. Die Randwerte mögen im folgenden allgemein durch Beifügung eines Sternes kenntlich gemacht

*) Über eine Erweiterung vgl. S. 67.

**) Über eine Erweiterung vgl. S. 69.

werden. Es ist demnach

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}=0; \quad z_0^*=z^*.$$

Unter den im Texte angegebenen Voraussetzungen für die Randfunktion z^* — analytische Funktion längs analytischer Begrenzung — ist bekanntlich*) die Lösung z_0 eine für den ganzen Bereich T einschließlich des Randes *analytische* Funktion ihrer Stelle; es läßt sich daher, wenn

$$z_0(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)=z_0^{(1)}; \quad z_0^{(1)}-z_0=\zeta_0(x,y)=\zeta_0$$

gesetzt wird, eine positive Konstante M_0 so finden, daß folgendes System für jede Stelle des Bereiches erfüllt sein wird:

$$\begin{array}{lll} |z_0|<M_0; & |z_0'|<M_0; & |z_0''|<M_0; \\ |\zeta_0|<2M_0\varrho; & |\zeta_0'|<2M_0\varrho; & |\zeta_0''|<2M_0\varrho^\lambda; \\ & 0<\lambda<1. & \end{array} \tag{3.}$$

Bemerkung. Aus den bereits erwähnten Sätzen der Herren *Dini* und *Fatou* kann gefolgert werden, daß dieses System im Falle des Kreises schon dann aufgestellt werden kann, wenn z^* als Funktion des Bogens zweimal differenzierbar ist und die zweite Ableitung einer *Lipschitz*schen Bedingung genügt. Läßt man der Funktion z^*, mit Ausnahme ihres analytischen Charakters, die übrigen im Texte angeführten Beschränkungen, so genügt es, daß z^* als Funktion des Parameters t diese Eigenschaften besitze. Die Übertragung vom Kreise auf die a. a. O.**) charakterisierten Gebiete ergibt sich ohne weiteres.

§ 3. *Die Methoden der Auflösung: Iteration und Superposition.*

Wir lösen jetzt nacheinander für

$$\nu=0,1,2,\ldots(n-1); \quad \lim n=\infty$$

folgendes System von partiellen Differentialgleichungen auf:

$$\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial y^2}+\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2}-2\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2}\right]=0; \tag{4.}$$

$$z_{\nu+1}^*=z_\nu^*=\cdots=z_1^*=z_0^*=z^*.$$

Zur Abkürzung möge gesetzt werden:

$$\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial y^2}=\Delta z_{\nu+1}; \tag{5.}$$

$$\left[\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2}-2\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2}\right]=D(z_\nu).$$

*) Vgl. *Picard*: Traité d'analyse, t. II, p. 301.

**) Vgl. S. 67.

Es ist demnach das System zu lösen:

$$\Delta z_{\nu+1} + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0; \quad z^*_{\nu+1} = z^*,$$

was wir auch so schreiben können:

(7.) $$\Delta(z_{\nu+1} - z_0) + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0; \quad (z_{\nu+1} - z_0)^* = 0.$$

Es sei G die *Green*sche Funktion des Bereiches T; dann ist explizite:

(8.) $$z_{\nu+1} - z_0 = \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \iint D(z_\nu) \cdot G \cdot d\xi\, d\eta.$$

Die Folge der Näherungsfunktionen

$$z_0, z_1, z_2, \ldots z_\nu, z_{\nu+1}, \ldots z_n$$

wird demnach durch einen Iterationsprozeß bestimmt.

Den Systemen (6.), (7.) ist das folgende vollständig äquivalent:

(9.) $$\Delta(z_{\nu+1} - z_\nu) + \varepsilon^2 [D(z_\nu) - D(z_{\nu-1})] = 0; \quad (z_{\nu+1} - z_\nu)^* = 0.$$

Hierin setzen wir

(10.) $$z_{\nu+1} - z_\nu = v_{\nu+1}$$

und folgern daraus

(11.) $$z_{\nu+1} = z_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_\nu + v_{\nu+1}.$$

Es ist explizite:

(12.) $$v_{\nu+1} = \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \iint [D(z_\nu) - D(z_{\nu-1})] \cdot G \cdot d\xi\, d\eta;$$

hier werden die Näherungsfunktionen durch ein Superpositionsverfahren gebildet.

Die Kombination der beiden angegebenen Prozesse ist der wesentliche Inhalt der Methode der sukzessiven Approximationen.

§ 4. *Die Konvergenzsätze.*

Wir behaupten nunmehr, daß für angebbar kleine Werte des Parameters ε die folgenden drei Sätze gelten:

Satz I. Auch bei beliebigem Wachsen des Index ν bleiben die Näherungsfunktionen $z_{\nu+1}$ mit ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen endlich und stetig.

*Satz II. Die vom Verfahren der sukzessiven Approximationen gelieferten unendlichen Reihen**):

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\ \dot{z} &= z_0' + v_1' + v_2' + \cdots \\ \ddot{z} &= z_0'' + v_1'' + v_2'' + \cdots \end{aligned}\right\} \text{ad inf.}$$

*) Die Striche bedeuten wieder Ableitungen.

konvergieren absolut und in gleichem Grade; es ist

$$\dot{z} = z'; \quad \ddot{z} = z''.$$

Satz III. Die eindeutig bestimmte Funktion z ist die gesuchte Lösung des gestellten Problems.

Diese Lösung selbst, sowie ihre partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen sind für den ganzen gegebenen Bereich einschließlich des Randes eindeutig, endlich und stetig. Alle diese Funktionen lassen sich in ihrem Bereiche nach steigenden Potenzen des Parameters ε entwickeln.

§ 5. *Beweis des ersten Hauptsatzes.*

Zur Untersuchung einer jeden durch die Formel (8.) gegebenen Näherungsfunktion $z_{\nu+1}$ müssen wir sowohl den absoluten Betrag des entsprechenden Differentialausdrucks $D(z_\nu)$ selbst, als auch den seiner endlichen Differenzen abschätzen, worauf die im ersten Teile gefundenen Resultate (52.) über das weitere Aufschluß geben werden. Wir kürzen folgendermaßen ab:

$$\begin{gathered} D(z_\nu) = D_\nu(x,y) = D_\nu; \\ D_\nu(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = D_\nu^{(1)}; \\ z_\nu(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha) = z_\nu^{(1)}; \\ z_\nu^{(1)} - z_\nu = \zeta_\nu. \end{gathered} \tag{13.}$$

Es ist

$$D(z_\nu) = \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots;$$

die fortgelassenen zwei Glieder der rechten Seite sind in den folgenden Ausführungen genau so abzuschätzen wie das ausgeschriebene erste; das Resultat der Abschätzung dieses ersten Gliedes wird jedesmal zu vervierfachen sein.

Wir nehmen an, es sei bereits das folgende System gefunden:

$$\begin{array}{lll} |z_\nu| < M_\nu; & |z_\nu'| < M_\nu; & |z_\nu''| < M_\nu; \\ |\zeta_\nu| < 2M_\nu\varrho; & |\zeta_\nu'| < 2M_\nu\varrho; & |\zeta_\nu''| < 2M_\nu\varrho^\lambda. \end{array} \tag{15.}$$

Jedenfalls ist M_0 nach Formel (3.) als bekannt zu betrachten.

Die größte Sehne des betrachteten Bereiches möge, wie beim Einheitskreise, gleich 2 vorausgesetzt werden; es ist dies offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit und bewirkt nur, daß wieder

$$\varrho > 2\varrho^\lambda$$

gesetzt werden darf. Wir haben nun:

$$(16.)\qquad |D_\nu| = \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots\right| < 4M_\nu^3 < 40M_\nu^3;$$

ferner

$$(17.)\quad D_\nu^{(1)} - D_\nu = \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_\nu}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} + \cdots\right|$$
$$= \left|\left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \zeta_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_\nu}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial y} + \cdots\right|$$
$$< 4\{M_\nu^2 \cdot 2M_\nu \varrho^\lambda + 2M_\nu \cdot M_\nu \cdot 2M_\nu \varrho\} < 40 M_\nu^3 \varrho^\lambda.$$

Die gefundenen Ungleichheitsbeziehungen (16.), (17.) entsprechen den Voraussetzungen (2.) im ersten Teile dieser Arbeit; wir dürfen nunmehr die daraus folgenden Bedingungen (52.) entsprechend anwenden. Wir erhalten für die untersuchte Funktion $z_{\nu+1}$ und ihre endlichen Differenzen $\zeta_{\nu+1}$ das System:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} |z_{\nu+1} - z_0| &< m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 \text{ usf.}, \\ |\zeta_{\nu+1} - \zeta_0| &< 2m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 \varrho \text{ usf.} \end{aligned}$$

Schreiben wir jetzt

$$(19.)\qquad M_0 + m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_\nu^3 = M_{\nu+1},$$

so ist infolge des Systems (3.)

$$(20.)\qquad \begin{aligned} &|z_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \quad |z'_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \quad |z''_{\nu+1}| < M_{\nu+1}; \\ &|\zeta_{\nu+1}| < 2M_{\nu+1}\varrho; \quad |\zeta'_{\nu+1}| < 2M_{\nu+1}\varrho; \quad |\zeta''_{\nu+1}| < 2M_{\nu+1}\varrho^\lambda. \end{aligned}$$

Dieses System ist denjenigen für z_ν und z_0 — vgl. Formeln (15.) und (3.) — vollständig analog. Es fragt sich jetzt nur noch, wann unter Zugrundelegung der Rekursionsformel (19.)

$$\lim_{n=\infty} M_n = M$$

existiert und endlich ist. Um dies zu entscheiden, setzen wir

$$(21.)\qquad M_\nu = k_\nu \cdot M_0; \quad m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M_0^2 = \varepsilon' \quad (\varepsilon' > 0);$$

es läßt sich nun zeigen, daß für

$$(22.)\qquad \varepsilon' < \frac{4}{27}$$

beständig

$$(23.)\qquad M_\nu < \frac{3}{2} M_0$$

bleibt. Es ist nämlich nach Einsetzen der Bezeichnungen (21.) in die Rekursionsformel (19.):

$$(24.)\qquad k_0 = 1; \quad k_{\nu+1} = 1 + \varepsilon' k_\nu^3.$$

Nehmen wir zunächst

$$\varepsilon' = \varepsilon'_0 = \frac{4}{27},$$

so ist

$$k_1 = 1 + \frac{4}{27} < \frac{3}{2};$$

$$k_2 = 1 + \frac{4}{27} k_1^3 < \frac{3}{2}; \quad \cdots$$

$$k_\nu < \frac{3}{2};$$

a fortiori ist für jedes kleinere ε'

$$k_\nu < \frac{3}{2}; \quad M_\nu = k_\nu M_0 < \frac{3}{2} M_0.$$

Bei der angegebenen Einschränkung des Parameters ε ist daher

$$(25.) \qquad |z_{\nu+1}| < \frac{3}{2} M_0 \text{ usf.},$$

$$|\zeta_{\nu+1}| < 3 M_0 \varrho \text{ usf.}$$

Der erste Hauptsatz dieses Teiles (vgl. S. 70) ist damit bewiesen.

Im übrigen ergeben die Rekursionsformeln (19.) und (24.) die Auflösung der entsprechenden algebraischen Gleichungen

$$M = M_0 + m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 M^3; \quad k = 1 + \varepsilon' k^3$$

mit den Unbekannten M bzw. k, nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen; durch die Möglichkeit einer solchen Auflösung für hinreichend kleine ε bzw. ε' wird auch die Möglichkeit der Lösung des gestellten Problems gewährleistet.

§ 6. *Beweis des zweiten Hauptsatzes.*

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung der durch die Formel (12.) gegebenen Funktionen $v_{\nu+1}$ über.

Zu diesem Zwecke müssen die Ausdrücke

$$D(z_\nu) - D(z_{\nu-1}) = D_\nu - D_{\nu-1}$$

und ihre endlichen Differenzen abgeschätzt werden.

Es ist:

$$(26.) \qquad z_\nu = z_{\nu-1} + v_\nu;$$

$$D_\nu - D_{\nu-1} = \left\{\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z_{\nu-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z_{\nu-1}}{\partial x^2}\right\} + \cdots$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2} \frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right\} + \cdots.$$

Wir führen die Abkürzungen ein:

$$(27.) \qquad v_\nu(x + \varrho \cos\alpha,\ y + \varrho \sin\alpha) = v_\nu^{(1)};$$

$$v_\nu^{(1)} - v_\nu = \varphi_\nu.$$

Nun denken wir uns bereits das folgende System aufgestellt:

$$(28.)\qquad \begin{aligned} &|v_\nu|<\Phi_\nu; \quad |v'_\nu|<\Phi_\nu; \quad |v''_\nu|<\Phi_\nu;\\ &|\varphi_\nu|<2\Phi_\nu\varrho; \quad |\varphi'_\nu|<2\Phi_\nu\varrho; \quad |\varphi''_\nu|<2\Phi_\nu\varrho^\lambda. \end{aligned}$$

Jedenfalls darf nach dem früheren, da

$$v_1=z_1-z_0$$

ist,

$$(29.)\qquad \Phi_1=m\cdot\varepsilon^2\cdot 40\,M_0^3=\varepsilon'\cdot M_0$$

als bereits bekannt gelten.

Wir machen jetzt von den Systemen (15.), (20.), (28.) Gebrauch und erhalten

$$(30.)\qquad \begin{aligned} |D_\nu-D_{\nu-1}| &<4\{M_{\nu-1}^2\Phi_\nu+(M_{\nu-1}+M_\nu)M_\nu\Phi_\nu\}\\ &<40(M_\nu^2+M_\nu M_{\nu-1}+M_{\nu-1}^2). \end{aligned}$$

Die endlichen Differenzen des hier betrachteten Differentialausdruckes können folgendermaßen geschrieben werden:

$$(31.)\qquad (D_\nu-D_{\nu-1})^{(1)}-(D_\nu-D_{\nu-1})=$$
$$=\left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 v_\nu^{(1)}}{\partial x}+\left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2}\,\frac{\partial v_\nu^{(1)}}{\partial y}\right]\\ &-\left[\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}+\frac{\partial z_\nu}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial x^2}\,\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\}+\cdots.$$

Setzen wir wieder

$$z_\nu^{(1)}=z_\nu+\zeta_\nu \text{ usf.},$$
$$v_\nu^{(1)}=v_\nu+\varphi_\nu \text{ usf.},$$

so erhält die Differenz (31.) die folgende Gestalt:

$$(32.)\qquad (D_\nu-D_{\nu-1})^{(1)}-(D_\nu-D_{\nu-1})=$$
$$=\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z_{\nu-1}}{\partial y}+\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v_\nu^{(1)}}{\partial x^2}\,\frac{\partial\zeta_{\nu-1}}{\partial y}+\left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\,\frac{\partial^2\zeta_\nu}{\partial x^2}\\ &+\left(\frac{\partial\zeta_{\nu-1}}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_\nu}{\partial y}\right)\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z_{\nu-1}^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial z_\nu^{(1)}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z_\nu^{(1)}}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y} \end{aligned}\right\}+\cdots,$$

woraus sich für den absoluten Betrag der betrachteten Differenz die Schranke

$$(33.)\qquad \begin{aligned} &4\left\{\begin{aligned} &M_{\nu-1}^2\cdot 2\Phi_\nu\varrho^\lambda+2M_{\nu-1}\cdot\Phi_\nu\cdot 2M_{\nu-1}\varrho+(M_{\nu-1}+M_\nu)\cdot\Phi_\nu\cdot 2M_\nu\varrho^\lambda\\ &+2(M_{\nu-1}+M_\nu)\varrho\cdot M_\nu\cdot\Phi_\nu+(M_{\nu-1}+M_\nu)\cdot M_\nu\cdot 2\Phi_\nu\varrho \end{aligned}\right\}\\ &<40\{M_\nu^2+M_\nu M_{\nu-1}+M_{\nu-1}^2\}\Phi_\nu\varrho^\lambda \end{aligned}$$

ergibt.

Infolge der Ungleichheitsbedingungen (30.), (33.) läßt sich jetzt schließen:

(34.) $$|v_{\nu+1}| < m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 \{M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2\} \Phi_\nu \text{ usf.}$$

Schreiben wir nun

(35.) $$m \cdot \varepsilon^2 \cdot 40 (M_\nu^2 + M_\nu M_{\nu-1} + M_{\nu-1}^2) \Phi_\nu = \Phi_{\nu+1},$$

so ist

(36.) $$|v_{\nu+1}| < \Phi_{\nu+1} \text{ usf.},$$

so daß aus den Systemen für $v_1, \ldots v_\nu$ — vgl. Formel (28.) — ein ganz analoges für $v_{\nu+1}$ gefunden ist.

Die Rekursionsformel (35.) stimmt im Grunde genommen mit der früher gefundenen (19.) überein, da allgemein

$$\Phi_{\nu+1} = M_{\nu+1} - M_\nu$$

ist. Zur Abschätzung von $\Phi_{\nu+1}$ machen wir von der Beziehung (23.) Gebrauch; die Rekursionsformel ergibt dann

(37.) $$\Phi_{\nu+1} < m \cdot \varepsilon^2 \cdot 270 M_0^2 \cdot \Phi_\nu.$$

Setzen wir nun — vgl. die Formeln (21.), (22.) —

(38). $$m \cdot \varepsilon^2 \cdot 270 M_0^2 = \frac{27}{4} \varepsilon' = \varepsilon'', \quad (0 < \varepsilon'' < 1),$$

so ergibt sich:

$$\Phi_{\nu+1} < \varepsilon''^\nu \Phi_1,$$

worin Φ_1 nach (29.) als endlich und bekannt anzusehen ist. Wir haben nunmehr

$$|v_{\nu+1}| + |v_{\nu+2}| + \cdots < \varepsilon''^\nu \Phi_1 + \varepsilon''^{\nu+1} \Phi_1 + \cdots = \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1;$$

(40.) $$|v'_{\nu+1}| + |v'_{\nu+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1;$$

$$|v''_{\nu+1}| + |v''_{\nu+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon''^\nu}{1-\varepsilon''} \Phi_1.$$

Dies besagt aber nichts anderes, als daß die drei Reihen

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 + v_1 + v_2 + \cdots \\ \dot{z} &= z'_0 + v'_1 + v'_2 + \cdots \\ \ddot{z} &= z''_0 + v''_1 + v''_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \text{ad inf.}$$

in dem ganzen Bereiche T absolut und in gleichem Grade konvergieren. Es folgt daraus auch ohne weiteres

$$\dot{z} = z'; \quad \ddot{z} = z''.$$

Der zweite Hauptsatz (S. 70) ist dadurch bewiesen.

§ 7. *Die Grenzfunktion z als Lösung des Problems.*

Wir können jetzt leicht den ersten Teil des dritten, noch unerledigt gebliebenen, Hauptsatzes beweisen. Wir haben allgemein:

$$(41.) \qquad \Delta z_{\nu+1} + \varepsilon^2 D(z_\nu) = 0;\ z^*_{\nu+1} = z^*,$$

also auch

$$(42.) \qquad \Delta z_\nu + \varepsilon^2 D(z_\nu) = -\Delta(z_{\nu+1} - z_\nu) = -\Delta v_{\nu+1};\ z^*_\nu = z^*.$$

Es folgt aus den Reihen (40.) unmittelbar:

$$(43.) \qquad \lim_{n=\infty} \Delta v_{\nu+1} = 0,$$

somit ist

$$(44.) \qquad \lim_{n=\infty} [\Delta z_n + \varepsilon^2 D(z_n)] = 0;\ \lim_{n=\infty} z^*_n = z^*.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$z = \lim_{n=\infty} z_n$$

tatsächlich die gesuchte Lösung des gestellten Problems darstellt. Aus dem System (25.) geht ferner, wenn

$$z(x + \varrho\cos\alpha,\ y + \varrho\sin\alpha) = z^{(1)},$$

$$z^{(1)} - z = \zeta;\ \frac{3}{2} M_0 = M$$

geschrieben wird, hervor, daß

$$(45.) \qquad \begin{array}{lll} |z| < M; & |z'| < M; & |z''| < M; \\ |\zeta| < 2M\varrho; & |\zeta'| < 2M\varrho; & |\zeta''| < 2M\varrho^\lambda. \end{array}$$

ist. In diesen Beziehungen ist der Beweis für die Endlichkeit und Stetigkeit sowohl der Lösung z als auch ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen enthalten; man ersieht daraus auch die Richtigkeit der im dritten Hauptsatze über das allgemeine Verhalten dieser Funktionen aufgestellten Behauptungen.

§ 8. *Die Entwickelung nach Potenzen des Parameters ε.*

Es sei rein formal die Entwickelung angesetzt

$$(46.) \qquad z = w_0 + \varepsilon^2 w_1 + \varepsilon^4 w_2 + \cdots;$$

ferner seien ebenso formal die nötigen Differentiationen gliedweise ausgeführt. Daß diese Ansätze gerechtfertigt sind, wird sich aus dem in der Folge gelieferten Nachweis ergeben, daß für hinreichend kleine Werte des Parameters ε alle in Betracht kommenden Reihen absolut und in gleichem Grade konvergieren.

Durch Einsetzen der Entwickelung (46.) in die zu integrierende partielle Differentialgleichung (1.) ergibt sich zunächst

$$(47.) \qquad w_0 = z_0;\ w^*_0 = z^*_0 = z^*,$$

worin z_0 die „Grundfunktion“ der bisherigen Untersuchung ist.

Ferner ergibt sich allgemein:

$$(48.)\qquad \Delta w_{p+1}+\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}\left\{\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2}+\cdots\right\}=0;\ w^*_{p+1}=0.$$

Die Abschätzung der Funktionen w_n geschieht in bereits öfters durchgeführter Weise. Wir schreiben

$$w_n(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)=w_n^{(1)};\ w_n^{(1)}-w_n=\omega_n,$$

und denken uns bereits je ein System von Ungleichheitsbedingungen für $w_0,\ w_1, w_2, \ldots w_p$ gefunden; es sei

$$(49.)\qquad \begin{array}{lll} |w_n|<W_n; & |w_n'|<W_n; & |w_n''|<W_n; \\ |\omega_n|<2W_n\varrho; & |\omega_n'|<2W_n\varrho; & |\omega_n''|<2W_n\varrho^\lambda. \end{array} \qquad (n=0,1,2,\ldots p)$$

Jedenfalls ist W_0 bereits bekannt; es ist

$$(50.)\qquad W_0=M_0.$$

Wir haben eine Abschätzung für das zweite Glied der linken Seite in der Formel (48.) und für die endlichen Differenzen dieses Gliedes vorzunehmen. Wir schreiben kurz

$$\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}\left\{\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2}+\cdots\right\}=D_p(x,y)=D_p,$$

$$D_p(x+\varrho\cos\alpha,\ y+\varrho\sin\alpha)=D_p^{(1)}.$$

Es ist

$$(51.)\qquad |D_p|<4\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}W_\varkappa W_\mu W_\nu<40\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}W_\varkappa W_\mu W_\nu;$$

$$\begin{aligned} |D_p^{(1)}-D_p| &= \Big|\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}\Big\{\Big(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}+\frac{\partial \omega_\varkappa}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial w_\mu}{\partial y}+\frac{\partial \omega_\mu}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial x^2}\Big) \\ &\qquad -\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial x^2}\Big\}+\cdots\Big| \\ &= \Big|\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}\Big(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial x^2}+\frac{\partial w_\varkappa^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial \omega_\varkappa}{\partial y}\frac{\partial w_\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 w_\nu^{(1)}}{\partial x^2}\Big)+\cdots\Big| \\ &< 4\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}(W_\varkappa W_\mu\cdot 2W_\nu\varrho^\lambda+W_\varkappa\cdot 2W_\mu\varrho\cdot W_\nu+2W_\varkappa\varrho\cdot W_\mu\cdot W_\nu) \\ &< 40\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}W_\varkappa W_\mu W_\nu\cdot\varrho^\lambda. \end{aligned}$$

Es läßt sich daher für w_{p+1} ein den Systemen (49.) analoges aufstellen, worin

$$(52.)\qquad W_{p+1}=40m\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}W_\varkappa W_\mu W_\nu$$

sein wird; es ist daher auch

$$(53.)\qquad \varepsilon^{2(p+1)}W_{p+1}=m\cdot\varepsilon^2\cdot 40\sum_{\varkappa+\mu+\nu=p}\varepsilon^{2\varkappa}W_\varkappa\cdot\varepsilon^{2\mu}W_\mu\cdot\varepsilon^{2\nu}W_\nu.$$

Wir setzen wieder

$$m\cdot\varepsilon^2\cdot 40M_0^2=\varepsilon';$$

ferner sei

(54.) $$\varepsilon^{2n} W_n = \varepsilon'^n \cdot l_n \cdot W_0$$

gesetzt; es ist nun

(55.) $$W_0 = M_0;\ l_0 = 1,\ l_{p+1} = \sum_{x+\mu+\nu=p} l_x l_\mu l_\nu .$$

Wir betrachten jetzt die unendliche Reihe

(56.) $$k = l_0 + \varepsilon' l_1 + \varepsilon'^2 l_2 + \cdots;\ l_0 = 1 .$$

Es ist

(57.) $$k^3 = \sum_{x+\mu+\nu=p} \varepsilon'^p l_x l_\mu l_\nu = \Sigma \varepsilon'^p l_{p+1} = \frac{k-1}{\varepsilon'};\ k = 1 + \varepsilon' k^3 .$$

Diese letzte algebraische Gleichung, die übrigens im Laufe der Untersuchung schon einmal aufgetreten ist (vgl. S. 73), muß hier mit Hilfe der *Lagrange*schen Formel für die Entwickelung impliziter Funktionen aufgelöst werden; wir erhalten

(58.) $$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon'^n}{n!} \frac{(3n)!}{(2n+1)!}$$

Durch Vergleichung der beiden Formeln (56.), (58.) erhalten wir weiter

(59.) $$l_n = \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} .$$

Die Reihe

(60.) $$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} W_n = W_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'^n l_n = M_0 \cdot k ,$$

also die Reihe der Höchstbeträge der absoluten Werte in der Entwicklung der Lösung z, oder einer beliebigen ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, nach Potenzen des Parameters ε, ist zugleich mit der Reihe (58.) im ganzen Bereiche T in gleichem Grade konvergent, wenn nur

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon'^{n+1} l_{n+1}}{\varepsilon'^n l_n} = \lim_{n=\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{27}{4} \varepsilon' = \varepsilon''$$

ein echter Bruch ist: die daraus fließende Bedingung

$$\varepsilon' < \frac{4}{27}$$

schließt wieder die gleiche Einschränkung des Parameters ε, wie sie uns bereits in den früheren Ausführungen begegnet ist, in sich ein.

Unter dieser Bedingung ist es somit möglich, sowohl die Lösung z als auch jede ihrer partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, nach steigenden Potenzen des Parameters ε in Reihen zu entwickeln, welche im ganzen gegebenen Bereiche unbedingt und in gleichem Grade konvergieren.

Damit ist auch die letzte Behauptung des dritten Hauptsatzes (vgl. S. 71) bewiesen.

§ 9. *Verallgemeinerung.*

Die Art, in der die Resultate des ersten Teiles der vorliegenden Arbeit auf die Lösung des Randwertproblems der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen angewandt worden ist, läßt erkennen, daß auch die allgemeinere partielle Differentialgleichung von elliptischem Typus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varepsilon \cdot F\Big(x, y, z;\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big)$$

der gleichen Behandlung zugänglich ist. Vorausgesetzt wird hierbei einerseits, daß sowohl für die vorgeschriebenen Randwerte als auch für die Begrenzung die in den Bemerkungen (S. 67, 69) angegebenen Einschränkungen gelten, andererseits, daß die eindeutige Funktion F für jedes ihrer acht (als voneinander unabhängig betrachteten) Argumente je einer *Lipschitz*schen Bedingung genügt, und sowohl für die Werte der entsprechenden Grundfunktion z_0 und ihrer partiellen Ableitungen als auch für einen etwas erweiterten Bereich jener Werte wohldefiniert bleibt. Es läßt sich auch dann bei angemessen kleinen Werten des Parameters ε die Lösung z nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen bestimmen und nach steigenden Potenzen von ε entwickeln.

Note on the equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, s_1 and s_2 being operators of a finite group.

Von Herrn *G. A. Miller* in Urbana, Illinois.

§ 1.

In 1878 *Cayley**) proved that a group which is generated by two operators (s_1, s_2) satisfying the condition $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$ cannot have the property that each of its operators may be represented in the form $s_2^\alpha s_1^\beta$. Recently Mr. *Netto***) considered the same equation and proved, among other things, that s_1 and s_2 must either be of the same order, or the order of one of these operators is twice the order of the other. This interesting result may be stated more generally as follows: *If the operators s_1 and s_2 satisfy the equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, then either the orders of s_1 and s_2 are equal to each other, or the order of one of these operators is an odd number and the order of the other is twice this odd number.* Mr. *Netto* also determined the orders of four groups which result by assigning certain small values to the orders of s_1 and s_2. The main objects of the present note are to determine these four groups completely and to exhibit more fully the rôle of the equation given in the heading as regards some important groups of finite order.

Any operator and its inverse may be used for s_1 and s_2 respectively since such operators satisfy the equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, and, if s_1 and s_2 are commutative, each one of them is the inverse of the other. In other words, if the group (G) generated by s_1 and s_2 is abelian, it is also cyclic and s_1, s_2 represent respectively a generator of this cyclic group and the

*) Messenger of Mathematics, vol. 7, p. 188.

**) This Journal, vol. 128 (1895), p. 252.

inverse of this generator. In this trivial case *Cayleys* theorem mentioned above does not hold true, so that this theorem is only strictly true when s_1 and s_2 are non-commutative. In what follows it will be assumed that s_1 and s_2 are non-commutative and hence G is a non-abelian group. The smallest order that either s_1 or s_2 can have is therefore 3, and the simplest case presents itself when the following conditions are satisfied:

$$s_1^3 = 1, \quad s_2^3 = 1, \quad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2.$$

As $s_1 s_2$ is equal to its inverse and cannot be the identity, it is of order 2 and hence we are dealing with two operators of order 3 whose product is of order 2. It is well known that two such operators must generate the tetrahedral group*). That is, *if two operators of order 3 are such that their product is equal to the product of their squares, in the reverse order, thay must generate the tetrahedral group.*

Among the fifteen possible abstract groups of order 24 there is one, and only one, that does not involve a subgroup of order 12. We proceed to prove that this group of order 24 is generated by s_1, s_2 if these operators satisfy the three conditions:

$$s_1^3 = 1, \quad s_2^6 = 1, \quad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2.$$

As a first step in this proof we shall observe that $\{s_1, s_2\}$ contains the quaternion group. Since the quaternion group is defined by the fact that it is generated by two non-commutative operators transforming each other into their third powers**), the following equations prove that $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$ is the quaternion group:

$$(s_2 s_1)^{-1} s_1 s_2 (s_2 s_1) = s_1^2 s_2^5 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_2 s_1 = s_1^2 s_2 s_1^2 s_2 s_1 = s_1^2 s_2 s_1 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1 = s_1^2 s_2 s_1 s_2^2 = s_1 s_2^4,$$

$$(s_1 s_2)^3 = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1 s_2 = s_1 s_2^4,$$

$$(s_1 s_2)^2 = s_1 s_2 s_1 s_2 = s_2^3 = (s_2 s_1)^2.$$

The last one of these three continued equations proves that $s_1 s_2$ and $s_2 s_1$ are both of order 4, since s_2^3 is of order 2. From the other two continued equations, it follows that $s_2 s_1$ transforms $s_1 s_2$ into its third power; that is, into itself multiplied by s_2^3. Hence $s_1 s_2$ must also transform $s_2 s_1$ into its third power and we have proved that $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$ is the quaternion group.

---

*) Cf. American Journal of Mathematics, vol. 24 (1902), p. 96.

**) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 14 (1907), p. 82.

To complete the proof of the fact that $\{s_1, s_2\}$ is the group of order 24 which does not contain a subgroup of order 12, it remains to prove that s_1 transforms $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$ into itself and that it transforms the three subgroups of order 4 in $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$ among themselves. This follows from the facts that s_1 transforms $s_1 s_2$ into $s_2 s_1$ and that $s_1^2 s_2 s_1^2 = s_1 \cdot s_1 s_2 \cdot s_1^2 = s_1 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1^2 = s_1 s_2^2 s_1 = s_1 s_2 \cdot s_2 s_1$ is in $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$. From the fact that s_1 transforms $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$ into itself and does not transform into itself any subgroup of order 4 contained in $\{s_1 s_2, s_2 s_1\}$, it follows that $\{s_1, s_1 s_2, s_2 s_1\}$ is the group of order 24 in question and we have proved the following theorem: *Two operators of orders* 3 *and* 6 *respectively which satisfy the condition that their product is equal to the product of their squares, in the reverse order, must generate the group of order* 24 *which does not contain a subgroup of order* 12.

§ 2.

Having considered in the preceding section all the possible groups generated by s_1, s_2 when the order of at least one of these operators is less than 4, it remains to consider cases in which both of these operators have orders greater than 3. If one of these orders is 4, the other must also be 4 and there result the following conditions:

$$s_1^4 = 1, \quad s_2^4 = 1, \quad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2, \text{ or } s_1^2 s_2^2 = s_2^3 s_1^3.$$

Since s_1^2, s_2^2 are both of order 2, they generate the dihedral group whose order is twice the order of $s_1 s_2$. This order may be determined as follows:

$$(s_1 s_2)^5 = s_1 s_2 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1 s_2 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1 s_2 = s_1 s_2^3 s_1^3 s_2^3 s_1^3 s_2 = s_1 \cdot s_1^2 s_2^2 \cdot s_1^2 s_2^2 \cdot s_2 = s_1^3 s_2^2 s_1^2 s_2^3 = 1.$$

Hence it results that $\{s_1^2, s_2^2\}$ is the dihedral group of order 10. This dihedral group is transformed into itself by s_1, since $s_1^{-1} \cdot s_1 s_2 \cdot s_1 = s_2 s_1$ and $s_2 s_1 = s_2^2 \cdot s_2^3 s_1^3 \cdot s_1^2$. That is, s_1 transforms two generators of this dihedral group, s_1^2 and $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, into operators of the group. From this it follows directly that $\{s_1, s_2\}$ is the metacyclic group of order 20, or the holomorph of the group of order 5. This proves the following theorem: *If two non-commutative operators of order* 4 *satisfy the condition that their product is equal to the product of their squares, in the reverse order, they generate the holomorph of the group of order* 5.

Although, according to *Cayley*s theorem mentioned in the first paragraph, the operators of this holomorph cannot all be represented in the form $s_2^\alpha s_1^\beta$, yet it is clearly possible to select two of its operators which

have this property. In fact, if t_1 represents any one of its four operators of order 5 and t_2 any one of its ten operators of order 4 each operator of G is given once, and only once, by the form $t_1^\alpha t_2^\beta$ ($\alpha = 1, \ldots 5$; $\beta = 1, \ldots 4$). On the contrary, neither of the two groups previously considered involves two operators which could be used in this manner. That is, while *Cayleys* theorem is true, with the trivial exception noted above, yet it may or may not be possible to find two operators (t_1, t_2) in G such that all the operators of G can be represented in the form $t_1^\alpha t_2^\beta$. In the group considered in the following section it is evidently possible to select two such operators.

§ 3.

Another very simple case presents itself when the following conditions are satisfied:

$$s_1^5 = 1, \quad s_2^5 = 1, \quad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2, \text{ or } s_1^3 s_2^3 = s_2^4 s_1^4.$$

It is easy to prove that the order of $s_1 s_2$ is 11. In fact,

$$(s_1 s_2)^5 = s_1 s_2 \cdot s_2^2 s_1^2 \cdot s_1 s_2 \cdot s_1^2 s_2^2 \cdot s_1 s_2 = s_1 s_2^3 \cdot s_1^3 s_2^3 \cdot s_1^3 s_2 = s_1 s_2^3 \cdot s_2^4 s_1^4 \cdot s_1^3 s_2 = s_1 s_2^2 s_1^2 s_2 = s_1^2 s_2^2,$$

$$(s_1 s_2)^{11} = s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_1^2 s_1 s_2 = s_1^2 \cdot s_1 s_2 \cdot s_2^2 \cdot s_2^2 s_1^2 = 1.$$

To prove that the cyclic group generated by $s_1 s_2$ is transformed into itself by s_1, it is only necessary to observe that s_1^3 transforms $s_2^2 s_1^2 = s_1 s_2$ into $s_1^2 s_2^2 = (s_1 s_2)^5$. From this it follows directy that $\{s_1, s_2\}$ is the semi-metacyclic group of order 55, and we have proved the theorem: *If two non-commutative operators of order* 5 *satisfy the condition that their product is equal to the product of their squares, in the reverse order, they generate the subgroup of order* 55 *contained in the holomorph of the cyclic group of order* 11.

In all the cases considered above the relation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$ together with the orders of s_1 and s_2 were sufficient to define a group completely; this is, however, not always true. In fact, it is easy to verify that more than one group contains two generators satisfying the conditions

$$s_1^6 = 1, \quad s_2^6 = 1, \quad s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2.$$

That the direct product of the tetrahedral group and the group of order 2 may be generated by two operators satisfying these conditions follows from the fact that s_1, s_2 may be regarded as the products of two operators of order 3, satisfying the conditions of the tetrahedral group as given in § 1, and an operator of order 2 which is commutative

with each of these operators of order 3. In a similar way we observe that the direct product of the group of order 2 and the group of order 24 which involves no subgroup of order 12, is a group of order 48 containing two generators satisfying these conditions imposed upon s_1 and s_2. This proves that the group generated by s_1, s_2 is not completely defined by the fact that s_1 and s_2 satisfy the conditions $s_1^6 = s_2^6 = 1$ and $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$.

*Abel*sche Körper als Kreisteilungskörper.

Von Herrn *Friedrich Steinbacher* in Friedrichshagen.

Daß jeder *Abel*sche Körper ein Kreisteilungskörper ist, hat *Kronecker* entdeckt und nach seinen Andeutungen Herr *Weber* bewiesen (Acta Math., Bd. 8). Dieser Beweis ist in vereinfachter Form im Lehrbuch der Algebra desselben Verfassers (Bd. 2) dargestellt. Einen zweiten Beweis teilte Herr *Hilbert* in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Math.-phys. Kl., 1896) mit, den er in kürzerer Form in Bd. 4 des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wiedergab. Herr *Mertens* hat schließlich in einer Untersuchung über zyklische Körper in Bd. 131 dieses Journals einen dritten Beweis niedergelegt, worauf es Herrn *Weber* gelang, in Bd. 132 desselben Journals seinem früheren Beweise eine sehr viel kürzere Form zu geben. Das geschah besonders durch die Einführung der vollständigen Induktion, die zuerst Herr *Hilbert* für unsern Satz benutzt hatte.

Jeder Beweis, der denselben Weg einschlagen will, zerfällt nun naturgemäß in zwei Teile. Zunächst ist zu zeigen, daß jeder zyklische Körper p-ten Grades, wo p irgendeine rationale Primzahl ist, mit einem Kreisteilungskörper identisch ist. Daraus ist dann zu folgern, daß auch jeder *Abel*sche Körper höheren Grades ein Kreisteilungskörper ist. In beiden Teilen des Beweises ist es vorteilhaft, sich auf die Untersuchungen zu beziehen, die Herr *Hilbert* über die Zerlegung einer Primzahl in einem beliebigen Körper angestellt hat. Es ist besonders der Begriff der Trägheitsgruppe eines Primideals, der hier von fundamentaler Bedeutung wird und durch den sich die Beweisführung wesentlich vereinfachen läßt, wie in der vorliegenden Arbeit nachgewiesen werden soll.

Für den ersten Teil des Beweises stützt sich Herr *Hilbert* auf den Satz von *Minkowski*, daß außer dem Körper der rationalen Zahlen kein Körper mit der Diskriminante ± 1 möglich sei. Dieser Satz gehört zu

den schwierigsten der Zahlentheorie, ist aber für uns nicht in seiner Allgemeinheit nötig. Wir haben ihn nur für zyklische Körper des Grades p zu beweisen. Hier führt eine Konstruktion von *Kummer* zum Ziel, ähnlich der, die Herr *Hilbert* für den relativ-zyklischen Körper durchgeführt hat (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, S. 271ff; im folgenden zitiert als *Hilbert*, B.). Einen solchen Beweis gebe ich im zweiten Abschnitt dieser Arbeit. Dieser Beweis ist auch sonst für unser Thema nicht ohne Interesse. Man kann aus ihm leicht schließen, daß ein zyklischer Körper p-ten Grades stets dann ein Kreisteilungskörper ist, wenn p nicht in seiner Diskriminante aufgeht.

Ist dagegen p in dieser Diskriminante enthalten, so reichen diese Schlüsse nicht aus. Der Fall, wo der *Abel*sche Körper ein zyklischer Körper p-ten Grades mit der Diskriminante p^a ist, bildet überhaupt den schwierigsten Teil des allgemeinen Satzes. Hier muß eine Beziehung zwischen dem zyklischen Körper und demjenigen Körper des Grades $p-1$ hergestellt werden, der von den p-ten Einheitswurzeln gebildet wird. Eine solche, algebraisch sowohl wie zahlentheoretisch wohl bekannte Beziehung wird durch die Resolventen von *Lagrange* gegeben. Sie definieren einen *Abel*schen Körper des Grades $p(p-1)$, der in allen Beweisen unseres Satzes eine wichtige Rolle spielt. Die Herren *Weber* und *Mertens* zeigen direkt, daß dieser Körper mit einem Kreisteilungskörper übereinstimmt, wobei sie sich auf *Kummer*s Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften solcher Körper stützen. Herr *Hilbert* hat im Hinblick auf die Wichtigkeit dieser Untersuchungen derartige Körper als *Kummer*sche Körper bezeichnet. Er kann sich mit dem Beweise begnügen, daß nur ein einziger solcher Körper mit den verlangten Eigenschaften existiert. Wir werden auch diesen Beweis im Zusammenhang mit der *Kummer*schen Konstruktion einfacher gestalten können.

Die Theorie der algebraischen Zahlen wird im folgenden immer in dem Umfange vorausgesetzt, wie sie im 18. und 19. Abschnitt des zweiten Bandes von *Weber*s Algebra (2. Aufl.) dargestellt ist. Zunächst stelle ich eine Reihe dort bewiesener Sätze zusammen, indem ich ihnen die für unsere Zwecke nötige Formulierung gebe.

Die im 5. Abschnitt benutzten Sätze über das Verhältnis zwischen dem Produkt und dem größten gemeinsamen Teiler zweier Körper ver-

danke ich der Vorlesung, die Herr *Frobenius* über Algebra zu halten pflegt. Ihm bin ich auch für Rat und Anregung in bezug auf die übrigen Teile der Arbeit zu vielem Danke verpflichtet.

1. *Die Diskriminante Abelscher Körper.*

Es sei P ein *Abel*scher Körper n-ten Grades, $\mathfrak{G}=(G_0=E, G_1, G_2, \dots G_{n-1})$ seine Gruppe, $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen dieses Körpers. Sind $t_1, t_2, \dots t_n$ unabhängige Variable, so heißt $\tau = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \cdots + t_n\omega_n$ eine *Fundamentalform* oder *Basisform des Körpers.* Durch die Substitution G gehe τ über in τ_G.

Jede rationale Primzahl p zerfällt in P in e verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_e$, wo e auch gleich 1 sein kann, und es ist $p=(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_e)^g$. Es gibt in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{T}$ von der Ordnung g, $\mathfrak{T}=(T_0=E, T_1, T_2, \dots T_{g-1})$, so daß stets $\tau_T \equiv \tau \pmod{\mathfrak{p}_1}$ ist. Diese Gruppe nennt Herr *Hilbert* die *Trägheitsgruppe* von $\mathfrak{p}_1$. Die Primideale $\mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_e$ haben ebenfalls Trägheitsgruppen; diese sind zu $\mathfrak{T}$ konjugiert und folglich, weil wir $\mathfrak{G}$ als eine *Abel*sche Gruppe angenommen haben, mit $\mathfrak{T}$ identisch. Wir wollen deshalb im folgenden $\mathfrak{T}$ die Trägheitsgruppe von p nennen. Die Ordnung von $\mathfrak{T}$ ist $p'p^a$, wo p' ein Teiler von $p'-1$ ist, wenn f aus der Gleichung $n=efg$ bestimmt wird. Die Zahl p' ist deshalb nicht mehr durch p teilbar. In $\mathfrak{T}$ ist nach einem bekannten Satz von *Sylow* eine Untergruppe $\mathfrak{V}=(V_0=E, V_1, V_2, \dots V_{p^a-1})$ von der Ordnung p^a enthalten. Sie hat die Eigenschaft, daß $\tau_V \equiv \tau \pmod{\mathfrak{p}_\lambda^2}$ ist und heißt die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{p}_\lambda$ oder von p. Für unsere Zwecke ist die Tatsache von größter Wichtigkeit, daß die Gruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{V}$ eine zyklische Gruppe von der Ordnung p' ist.

Die algebraische Form $f(\tau)=(\tau-\tau_{G_1})(\tau-\tau_{G_2})\cdots(\tau-\tau_{G_{n-1}})$ ist eine ganze rationale Funktion von $t_1, t_2, \dots t_n$ mit Koeffizienten, die ganze Zahlen in P sind. Die Norm von $f(\tau)$, $Nf(\tau)$, ist eine ebensolche Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten, deren größter gemeinschaftlicher Teiler die Diskriminante Δ von P ist. Wir sagen im Anschluß an *Kronecker*, daß dann $Nf(\tau)$ äquivalent $(\backsim)\Delta$ ist. Hat p eine von E verschiedene Trägheitsgruppe, so sieht man, daß mindestens einer der Faktoren von $f(\tau)$ durch $\mathfrak{p}_\lambda$ teilbar ist, daß also p in Δ aufgeht. Nur dieser Fall hat für uns Interesse, und wir reden von einer Trägheitsgruppe nur dann, wenn sie von E verschieden ist.

Ist nun $\mathfrak{H}=(H_0=E, H_1, H_2, \ldots H_{h-1})$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung h, so gehört im Sinne der Algebra zu $\mathfrak{H}$ ein Teiler P_1 von P vom Grade $i=\frac{n}{h}$ mit der Diskriminante Δ_1, und es ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_1+\mathfrak{H}G_2+\cdots+\mathfrak{H}G_{i-1}$, wo $G_1, G_2, \ldots G_{i-1}$ passend gewählte Elemente von $\mathfrak{G}$ sind. Wir können dann schreiben:

$$\begin{aligned} f(\tau)= & (\tau-\tau_{H_1})\ (\tau-\tau_{H_2})\cdots\ (\tau-\tau_{H_{h-1}}) \\ & (\tau-\tau_{G_1})\ (\tau-\tau_{H_1G_1})\ (\tau-\tau_{H_2G_1})\cdots\ (\tau-\tau_{H_{h-1}G_1}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (\tau-\tau_{G_{i-1}})(\tau-\tau_{H_1G_{i-1}})(\tau-\tau_{H_2G_{i-1}})\cdots(\tau-\tau_{H_{h-1}G_{i-1}}). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir das Produkt in der ersten Zeile mit $g(\tau)$, das Übrige mit $h(\tau)$, so ist $f(\tau)=g(\tau)h(\tau)$, und es wird $Nh(\tau) \backsim \Delta_1^h$ (*Hilbert*, B. § 16, *Weber* Bd. II, § 177).

Ist $\mathfrak{H}$ die Trägheitsgruppe von p, so sind nur die Faktoren von $g(\tau)$ durch Primideale von p teilbar, nicht die von $h(\tau)$. P_1 heißt dann der Trägheitskörper von p, und wir haben den Satz, daß die Diskriminante des Trägheitskörpers von p nicht durch p teilbar ist. Dies genügt für das Folgende. Es ergibt sich aber aus der obigen Formel der noch schärfere Satz:

In einem Abelschen Körper P ist der Trägheitskörper von p derjenige Teiler von P, der die größte durch p nicht teilbare Diskriminante hat.

Hat daher P die Beschaffenheit, daß jede Diskriminante Δ_1 durch p teilbar ist, so ist der Trägheitskörper von p der Körper der rationalen Zahlen, und $\mathfrak{G}$ ist selber die Trägheitsgruppe von p.

2. *Es gibt keinen zyklischen Körper mit der Diskriminante* ± 1.

Es sei A ein zyklischer Körper vom Primzahlgrade p, ferner $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ eine Basis seiner ganzen Zahlen. Seine Gruppe $\mathfrak{S}$ besteht aus den Potenzen einer einzigen Substitution S von der Ordnung p. Wir machen hier mit Vorteil von einer bequemen Schreibweise Gebrauch, die Herr *Hilbert* eingeführt hat (B., S. 271), indem wir $\omega_{S^\beta}^{\alpha}=\omega^{\alpha S^\beta}$ setzen. Dann ist $\omega^{S^p}=\omega^E=\omega$ oder $\omega^{S^p-1}=1$.

Zunächst sei $p>2$. Aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen (vgl. *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. § 183) brauchen wir nur den Satz, daß es in A eine von ± 1 verschiedene Einheit gibt.

Von *Kummer* rührt eine interessante Verallgemeinerung der Resolventen von *Lagrange* her (Zwei neue Beweise der allgemeinen Reziprozitätsgesetze usw., Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin 1861, auch dieses Journal Bd. 100), die Herr *Hilbert* (B., S. 272) noch weiter ausgedehnt hat. Ich brauche sie hier in folgender Form: Für die oben genannte Einheit ε und für irgendeinen Wert von $\varkappa$ sei:

$$(1.) \qquad \alpha = \omega_\varkappa + \omega_\varkappa^S \varepsilon + \omega_\varkappa^{S^2} \varepsilon \varepsilon^S + \cdots + \omega_\varkappa^{S^{p-1}} \varepsilon \varepsilon^S \varepsilon^{S^2} \cdots \varepsilon^{S^{p-2}};$$

dann folgt daraus

$$(2.) \qquad \alpha = \varepsilon \alpha^S,$$

weil $\varepsilon \varepsilon^S \varepsilon^{S^2} \ldots \varepsilon^{S^{p-1}} = 1$ ist. Die p Größen α, die sich aus (1.) ergeben, können nicht sämtlich Null sein, denn in diesem Falle würde (1.) ein System von p homogenen linearen Gleichungen für die nicht verschwindenden Größen $1, \varepsilon, \varepsilon\varepsilon^S, \ldots$ darstellen, dessen Determinante gleich der Quadratwurzel aus der Diskriminante von A ist, also ebenfalls nicht verschwindet. In (2.) darf ich demnach α von Null verschieden annehmen. Es ist eine algebraische Zahl in A, die nicht selber rational sein kann, wohl aber durch eine ganze rationale Zahl teilbar sein könnte. Ein solcher Faktor würde dann auch in α^S vorkommen und kann aus (2.) fortgelassen werden. Das soll im folgenden immer geschehen sein. Jeder Einheit ε entspricht mindestens eine solche Größe α; wir können schreiben: $\varepsilon = \alpha^{1-S}$. Nun kann α ebenfalls eine Einheit sein; es gilt jedoch der Satz:

Es gibt in A solche Einheiten ε, für welche die Größe α keine Einheit ist.

Gibt es nämlich solche Einheiten nicht, so ist etwa $\varepsilon = \varepsilon_1^{1-S}$; ebenso aber wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{1-S}$ usw., wo die $\varepsilon_\varkappa$ stets Einheiten sind. Die Größe ε läßt sich durch jede dieser unendlich vielen Größen $\varepsilon_\varkappa$ ausdrücken, und es wird $\varepsilon = \varepsilon_1^{1-S} = \varepsilon_2^{(1-S)^2} = \cdots = \varepsilon_\varkappa^{(1-S)^\varkappa}$. Insbesondere ist $\varepsilon = \varepsilon_p^{(1-S)^p}$. Wird der Exponent nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so kommt rechts der Faktor $\varepsilon^{1-S^p} = 1$ vor. Die übrigen Potenzen von S haben alle durch p teilbare Koeffizienten; das heißt aber, daß ε die p-te Potenz einer anderen Einheit in A ist, oder, daß auch $\sqrt[p]{\varepsilon}$ eine Einheit in A ist. Diese nenne ich ε'. Von ε' ausgehend komme ich zu einer neuen Einheit $\varepsilon'' = \sqrt[p]{\varepsilon'}$ usw. Dieser Prozeß kann aber nicht unendlich viele Male fortgesetzt werden; denn sei G eine Größe größer als 1, unterhalb deren ε und die ihm konjugierten

Größen alle dem absoluten Werte nach liegen, so gilt dasselbe auch von $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$. Nun gibt es aber nur eine endliche Anzahl von Gleichungen n-ten Grades, in denen der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist, die übrigen rationale ganze Zahlen sind und deren Wurzeln dem absoluten Betrage nach kleiner als G sind.

Unser Verfahren führt folglich nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Einheit ε, für die das zugehörige α keine Einheit mehr ist.

Ist dagegen $p=2$, so genügt es, $\varepsilon=-1$ zu nehmen. Ist ω eine den Körper bestimmende ganze Zahl, so setzen wir $\alpha=\omega-\omega^S$, also $\alpha^S=\omega^S-\omega$ und folglich $\alpha=-\alpha^S$. Ist α nach Entfernung der rationalen Faktoren keine Einheit, so ist unser Ziel erreicht; wird dagegen $\varepsilon_1=-\varepsilon_1^S$, so ergibt sich wegen $\varepsilon_1\varepsilon_1^S=\pm 1$:

$$\varepsilon_1^2=\pm 1,$$

und da wegen $\varepsilon_1=-\varepsilon_1^S$ das Zeichen $+$ nicht gilt, so folgt $\varepsilon_1=i$. Der Körper $P(i)$ hat aber die Diskriminante -4.

Die Größe α untersuchen wir nun in bezug auf die in ihr enthaltenen Primideale. Es sei q eine rationale Primzahl, die mit α einen Teiler gemeinsam habe. Im ersten Abschnitt ist ausgeführt worden, daß zu q drei Zahlen e, f, g gehören, so daß $efg=n$ ist, die die Zerlegbarkeit von q bestimmen. Hier ist $n=p$, also müssen stets zwei dieser Größen gleich 1 sein, die dritte ist p. Wenn $f=p$ ist, so bleibt q auch in A eine Primzahl; sie kann nach unserer Voraussetzung in α nicht aufgehen.

Ist $e=p$, so wird $q=\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_{p-1}$. Dann sei α etwa durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Durch S gehe $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}_1$ über, durch S^2 in $\mathfrak{q}_2$ usw.; dann ist α^S durch $\mathfrak{q}_1$ teilbar, vermöge der Gleichung (2.), demnach auch α; hieraus folgt wieder, daß α^S durch $\mathfrak{q}_2$ teilbar ist, also auch α; es zeigt sich schließlich, daß α durch $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_{p-1}=q$ teilbar ist, was wir ausgeschlossen hatten.

In α sind demnach nur Primteiler solcher Primzahlen enthalten, für die $g=p$ ist. Ist q eine Primzahl dieser Art, so ist $q=\mathfrak{q}^p$. Daher ist q in der Diskriminante von A enthalten. Da jeder *Abel*sche Körper einen zyklischen Körper A enthält und die Diskriminante eines Körpers durch die Diskriminante jedes Teilers teilbar ist, so haben wir den allgemeineren Satz:

In der Diskriminante eines Abelschen Körpers ist mindestens eine Primzahl enthalten.

Von der Primzahl q, die mit α einen Teiler gemeinsam hat, gilt ein wichtiger Satz, zu dessen Ableitung wir nun übergehen.

3. *Zyklische Körper, deren Diskriminante nur eine einzige Primzahl enthält.*

Wir gehen wieder von dem im vorigen Abschnitt behandelten Körper p-ten Grades aus und nehmen an, daß seine Diskriminante eine Potenz einer rationalen Primzahl q ist, wo q nicht von p verschieden zu sein braucht. Es wird $q = \mathfrak{q}^p$, und die Zahl α, welche der Bedingung $\alpha = \varepsilon \alpha^s$ genügt, enthält nur den Idealteiler $\mathfrak{q}$, ist also etwa gleich $\mathfrak{q}^a$, wo a zwischen 1 und $p-1$ liegt. Genügt dann b der Kongruenz $ab \equiv 1 \pmod{p}$, so ist $\alpha^b = q^c \alpha_1$, $\alpha^{bs} = q^c \alpha_1^s$, $\alpha^b = \varepsilon^b \alpha^{bs}$, folglich $\alpha_1 = \varepsilon^b \alpha_1^s$. Hier ist α_1 nur durch $\mathfrak{q}$ teilbar und durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{q}$. Im folgenden benutzen wir immer nur eine solche Größe α_1, die wir wieder mit α bezeichnen. Schreiben wir statt ε^b wieder ε, so haben wir auch hier $\alpha = \varepsilon \alpha^s$, und es ist $\alpha^p = \eta q$, wo η eine Einheit ist.

Von jetzt ab trennen wir zweckmäßig die beiden Fälle, wo q von p verschieden ist und wo $q = p$ ist. Der erste läßt sich im Hinblick auf unser Thema leicht und erschöpfend behandeln.

Es zeigt sich zunächst, daß die Primzahl q nicht beliebig sein kann. Hier gilt ein Satz, den wir gleich in seiner allgemeinsten Form aussprechen und beweisen:

Hat ein zyklischer Körper des Grades p^a die Eigenschaft, daß der in ihm enthaltene Teiler p-ten Grades eine durch q teilbare Diskriminante hat, so ist $q-1$ durch p^a teilbar.

Da unser Körper als zyklischer nur einen einzigen Teiler p-ten Grades hat, so geht dieser auch in allen übrigen Teilern auf. Sämtliche Diskriminanten sind daher durch q teilbar. Nach den Ausführungen des ersten Abschnitts ist deshalb der Körper der rationalen Zahlen Trägheitskörper von q, die Gruppe des gegebenen Körpers selber die Trägheitsgruppe, $g = p^a$, $f = 1$. Es war stets $g = q' q^b$, wo q' ein Divisor von $q-1$ ist. Wir haben folglich $p^a = q' q^b$, daraus ergibt sich $b = 0$, und p^a ist deshalb in $q-1$ enthalten. Das dürfte der kürzeste und natürlichste Beweis des wichtigen Satzes sein (vgl. z. B. *Hilbert*, B., S. 342).

Wir betrachten nun einen zyklischen Körper des Grades p^a, dessen Diskriminante nur durch q teilbar ist. Es ist also $q-1$ durch p^a teilbar. Einen solchen Körper finden wir unter den Kreisteilungskörpern; denn aus der Gleichung $x^q=1$ entspringt ein Körper des Grades $q-1$, der selber zyklisch ist und deshalb einen zyklischen Teiler des Grades p^a enthält. Diesen Körper nennen wir P. Seine Diskriminante ist eine Potenz von q. Ich behaupte, daß es einen zweiten Körper dieser Art nicht gibt: Wäre P_1 ein zweiter Körper, so wäre das Produkt von P und P_1 ein *Abel*scher Körper des Grades p^b $(b>a)$, dessen Diskriminante gleichfalls eine Potenz von q sein würde. Dieser Körper wäre nicht zyklisch, denn sonst könnte er nur einen Teiler des Grades p^a haben, da eine zyklische Gruppe der Ordnung p^b nur einen Teiler der Ordnung p^{b-a} hat. Seine Gruppe wäre die Trägheitsgruppe von q. Da ihre Ordnung nicht durch q teilbar ist, so wäre $\mathfrak{B}=E$. Es ist aber stets $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}$ zyklisch, also müßte die Gruppe zyklisch sein, was ein Widerspruch ist. Damit ist bereits die Identität einer ganzen Klasse von zyklischen Körpern mit Kreisteilungskörpern nachgewiesen.

4. *Der zyklische Körper p-ten Grades mit der Diskriminante p^a.*

Es bleibt der zweite und schwierigere Fall zu erledigen, wo die Diskriminante des zyklischen Körpers p-ten Grades nur die Primzahl p enthält. Wenn wir an den oben dargelegten Gedankengang anknüpfen, so werden wir uns Kreisteilungskörper verschaffen müssen, die mit den gegebenen zyklischen Körpern zu vergleichen sind.

Ist $p=2$, so ist der aus $\frac{x^{2^a}-1}{x^{2^{a-1}}-1}=x^{2^{a-1}}+1=0$ entspringende Kreisteilungskörper kein zyklischer. Er enthält, wie aus der Form der Gleichung ersichtlich ist, die Zahl i, und in seiner Gruppe ist daher eine Substitution A der Ordnung 2, die i in $-i$ überführt. Der dazu gehörige Teiler $\mathcal{A}$ enthält also nur reelle Zahlen; er ist zyklisch vom Grade 2^{a-2}. Dazu kommt als zweiter Teiler der rein-imaginäre quadratische Körper $P(i)$. Nehmen wir den einfachsten Fall $a=3$, so enthält der Körper vierten Grades, der aus $x^4+1=0$ entsteht, den reellen Teiler $\mathcal{A}=P(\sqrt{2})$, ferner $P(i)$ und deshalb auch $P(i\sqrt{2})$. Alle Diskriminanten sind Potenzen von 2. Aus den Betrachtungen des zweiten Abschnittes folgt sofort, daß es außer den drei genannten keinen Körper zweiten Grades gibt, dessen Diskriminante dieselbe Eigenschaft hat.

Betrachten wir nun wieder den Körper des Grades 2^{a-1}, so besteht seine Gruppe aus Substitutionen von der Form $A^\alpha B^\beta$, wo A die Ordnung 2, B die Ordnung 2^{a-2} hat. Zu A sollte $\mathcal{A}$ gehören, zu B gehört dann $P(i)$. Die Gruppe kann aber auch in die Form $C^\gamma D^\delta$ gebracht werden, wo $C=AB^{2^{a-3}}$ und $D=AB$ ist. Da C die Ordnung 2 hat, so gehört zu $\mathfrak{C}=(C^\gamma)$ ein zweiter zyklischer Körper $\mathcal{B}$ des Grades 2^{a-2}. Dieser Körper hat mit $\mathcal{A}$ einen Teiler des Grades 2^{a-3} gemeinsam. Zu $\mathfrak{D}=(D^\delta)$ gehört demnach der Körper $P(i\sqrt{2})$, und B besteht nicht nur aus reellen Zahlen, aber alle in ihm enthaltenen reellen Zahlen bilden einen Teiler des Grades 2^{a-3}, der auch in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Gäbe es außer $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ noch einen weiteren zyklischen Körper des Grades 2^{a-2} mit einer nur durch 2 teilbaren Diskriminante, so ist er entweder reell oder imaginär. Im letzteren Falle enthält er außer jeder Zahl $a+bi$ auch die konjugierte $a-bi$; die Substitution seiner Gruppe, welche die eine in die andere überführt, ist von der Ordnung 2 und gehört zu einem reellen Körper des Grades 2^{a-3}. So haben wir aus dieser Betrachtung folgendes Resultat gewonnen:

Es gibt drei zyklische Körper 2-ten Grades mit nur durch 2 teilbarer Diskriminante; es sind der reelle Körper $P(\sqrt{2})$ und die imaginären $P(i)$ und $P(i\sqrt{2})$. Das sind Kreisteilungskörper. Hat dagegen der zyklische Körper den Grad 2^a, wo $a>1$ ist, so besitzt er einen reellen Teiler mindestens vom Grade 2^{a-1}, enthält also jedenfalls den Körper $P(\sqrt{2})$.

Von nun an sei $p>2$ und $\mathcal{A}$ ein zyklischer Körper p-ten Grades mit der Diskriminante p^a. In ihm ist $p=\mathfrak{p}^p$, wo $\mathfrak{p}$ das durch die oben erhaltene Zahl α definierte Hauptideal ist. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{A}$ ist die Trägheitsgruppe von p, und da ihre Ordnung gleich p ist, auch die Verzweigungsgruppe von p. Demnach ist $\tau\equiv\tau^A \pmod{\alpha^2}$. Jeder Faktor von $f(\tau)$ ist mindestens durch α^2 teilbar, und $Nf(\tau)$ oder Δ_p mindestens durch $p^{2(p-1)}$. Es wird sich später ergeben, daß Δ_p genau gleich $p^{2(p-1)}$ ist (vgl. unten (4.)).

Ferner sei $\mathcal{B}$ der Körper der p-ten Einheitswurzeln vom Grade $p-1$. Wir können in derselben Weise schließen, daß seine Diskriminante $\Delta_{p-1}=p^{p-2}$ ist.

Aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bilden wir nun jenen *Abel*schen (sogar zyklischen) Körper P des Grades $p(p-1)$, der seit den Zeiten von *Lagrange* in der Algebra und der Zahlentheorie eine so wichtige Rolle gespielt hat. Seine

Gruppe $\mathfrak{G}$ ist das Produkt aus einer Gruppe $\mathfrak{S}=(S^x)$ von der Ordnung p und einer Gruppe $\mathfrak{R}=(R^\lambda)$ der Ordnung $p-1$, wo A zu $\mathfrak{R}$ und B zu $\mathfrak{S}$ gehört. In A war p genau durch α^p teilbar. Ist ϱ eine p-te Einheitswurzel und bezeichnen wir $1-\varrho$ mit β, so ist in B die Primzahl p gleich der $(p-1)$-ten Potenz des durch β bestimmten Hauptideals. Für P ist $\mathfrak{G}$ die Trägheitsgruppe von p, also $p=\mathfrak{p}^{p(p-1)}$, daher ist $\alpha=\mathfrak{p}^{p-1}$ und $\beta=\mathfrak{p}^p$, und $\mathfrak{p}$ ist das durch $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmte Hauptideal.

Wir bestimmen die Diskriminante Δ von P. Zu dem Zwecke bilden wir $f(\tau)$ in doppelter Weise nach den Vorschriften des ersten Abschnitts. Einmal sei die erste Zeile $(\tau-\tau^S)(\tau-\tau^{S^2})\cdots(\tau-\tau^{S^{p-1}})$. Die übrigen Zeilen bilden, wenn wir zu $Nf(\tau)$ übergehen, $\Delta_{p-1}^p=p^{p(p-2)}$. $\mathfrak{S}$ ist die Verzweigungsgruppe von p, also ist $\tau-\tau^{S^x}$ durch $\mathfrak{p}^a$ teilbar, wo $a\geqq 2$ ist. Gehen wir auch hier zur Norm über, so wird $\Delta=p^{a(p-1)+p(p-2)}$. Andererseits können wir $f(\tau)$ auch anfangen lassen mit $(\tau-\tau^R)(\tau-\tau^{R^2})\cdots(\tau-\tau^{R^{p-2}})$. Aus den übrigen Zeilen ergibt sich $\Delta_p^{p-1}\geqq p^{2(p-1)^2}$. Von den Faktoren $\tau-\tau^{R^\lambda}$ ist jeder nur durch $\mathfrak{p}$ teilbar, demnach wird jetzt $\Delta\geqq p^{2(p-1)^2+p-2}$. Vergleichen wir die erhaltenen Werte, so muß $a(p-1)+p(p-2)\geqq 2(p-1)^2+p-2$ sein oder $a\geqq p$. Ist demnach μ eine beliebige Zahl in P, so haben wir das später wichtig werdende Resultat, daß $\mu-\mu^S$ durch $\mathfrak{p}^p$ teilbar ist. Hiermit stellen wir die Tatsache zusammen, daß durch S die Zahl α in α^S übergeht, wo $\alpha=\varepsilon\alpha^S$ ist, so daß $\alpha-\alpha^S=\alpha^S(\varepsilon-1)$ durch α^2 teilbar ist, also $\varepsilon-1$ durch α oder $\mathfrak{p}^{p-1}$.

Für den Körper A bilden wir die Resolventen von *Lagrange*. Ist ω eine primitive Zahl von A, so sei

$$\lambda=\omega+\varrho\,\omega^S+\varrho^2\omega^{S^2}+\cdots+\varrho^{p-1}\omega^{S^{p-1}}; \tag{1.}$$

daraus folgt dann

$$\lambda=\varrho\,\lambda^S, \tag{2.}$$

und daraus

$$\lambda^p=\lambda^{pS}. \tag{3.}$$

λ ist eine von Null verschiedene Größe, die nach (2.) keine Zahl von B ist, dagegen ist nach (3.) λ^p eine solche Zahl, die wir $\varphi(\varrho)$ nennen wollen. Wir können also setzen: $\lambda=\sqrt[p]{\varphi(\varrho)}$. Ist λ durch eine Zahl von B teilbar, so lassen wir einen solchen Faktor weg. (Es kann z. B. leicht gezeigt werden, daß der Faktor β stets in λ enthalten ist.)

Die Substitution R kann so gewählt werden, daß sie ϱ in ϱ^2 überführt; aus $\lambda = \sqrt[p]{\varphi(\varrho)}$ soll dabei $\lambda' = \sqrt[p]{\varphi(\varrho^2)}$ werden. Es folgt dann aus (2.):

$$\lambda' = \varrho^2 (\lambda')^S.$$

Ferner ist $(\lambda^{p-2}\lambda')^S = \lambda^{p-2}\lambda'$ und folglich eine Zahl von B. Dieses Resultat kann benutzt werden, der Zahl λ eine besonders vorteilhafte Eigenschaft zu verschaffen. λ sollte nicht durch β teilbar sein; es ist aber möglich, daß λ noch durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ist nun $\lambda = \sqrt[p]{\varphi(\varrho)}$ genau durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar $(b < p)$, so ist auch $\lambda' = \sqrt[p]{\varphi(\varrho^2)}$ durch $\mathfrak{p}^b$ teilbar und das Produkt $(\lambda^{p-2}\lambda')\lambda$ genau durch $\mathfrak{p}^{bp}$ oder β^b. Dieses Produkt kann keine Zahl in B sein, denn in der Klammer steht eine solche Zahl, und dann würde auch λ in B liegen, was ausgeschlossen ist. Dividieren wir die so erhaltene Größe durch β^b, so erhalten wir eine neue Größe λ, die nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist und der Bedingung (2.) genügt. Eine solche Größe λ legen wir der weiteren Untersuchung zugrunde.

Die Gleichung $\frac{x^{p^a}-1}{x^{p^{a-1}}-1} = 0$ liefert uns einen zyklischen Kreisteilungskörper des Grades $p^{a-1}(p-1)$, der einen zyklischen Teiler des Grades p^{a-1} enthält. Die Diskriminanten sind sämtlich Potenzen von p. Ist insbesondere $a = 2$, so ist $\frac{x^{p^2}-1}{x^p-1} = 0$ die Gleichung des Körpers P, der aus B und dem Kreisteilungskörper A_p besteht, den wir mit A vergleichen wollen. Setzen wir $x^p = y$, so können wir die Gleichung von P schreiben: $\frac{y^p-1}{y-1} = y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1 = (y-\varrho)(y-\varrho^2)\cdots(y-\varrho^{p-1})$. Daraus ergibt sich z. B. $x = \sqrt[p]{\varrho^a}$, und jede dieser Größen kann für λ gewählt werden. Diese λ sind sämtlich Einheiten; aus Sätzen, die *Kummer* bewiesen hat (vgl. *Weber*, Bd. II, S. 751), läßt sich folgern, daß das mit den eben dargelegten Eigenschaften von λ in ursächlichem Zusammenhang steht. Das ist der Weg, auf dem Herr *Weber* seinen Beweis führt; auch Herr *Mertens* benutzt diese *Kummer*schen Sätze.

Gehört nun λ wieder zu A, so ist $\lambda \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$, wo a eine ganze rationale Zahl ist, denn $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal ersten Grades. Demnach ist $\lambda - a$ teilbar durch $\mathfrak{p}$, oder weil $\mathfrak{p}$ das durch $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmte Hauptideal ist, $\lambda - a = \mu\frac{\beta}{\alpha}$; hier ist μ eine ganze Zahl in P. Wenden wir darauf S an, so ergibt sich

$$\lambda^s - a = \mu^s \frac{\beta}{\alpha^s} \quad \text{oder} \quad \varrho^{-1}\lambda - a = \mu^s \frac{\beta^s}{\alpha}.$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$\alpha\lambda = \varrho(\varepsilon(\mu^s - \mu) - \mu(1-\varepsilon)) \text{ oder}$$

$$\varrho\mu(1-\varepsilon) = -\alpha\lambda + \varrho\varepsilon(\mu^s - \mu). \tag{4.}$$

Die rechte Seite ist hier genau durch $\mathfrak{p}^{p-1}$ teilbar, also auch die linke; folglich ist μ nicht mehr durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Betrachten wir statt λ die zugehörige Zahl φ, so folgt aus $(\lambda-a)^p \equiv \lambda^p - a^p \pmod{p}$ wegen $\lambda^p = \varphi$ und $a^p \equiv a \pmod{p}$, daß $\varphi - a$ durch β, aber nicht durch β^2 teilbar ist.

Das ist aber hinreichend, um zu zeigen, daß nur ein einziger Körper A existiert, der demnach mit A_p identisch sein muß. Sind nämlich A und A_p verschieden, so ist ihr Produkt ein nicht zyklischer *Abel*scher Körper des Grades p^2. Ein solcher enthält, wie die Betrachtung seiner Gruppe zeigt, $p+1$ zyklische Körper $A, A_1, A_2, \ldots A_p$. Ihnen entsprechen die $p+1$ Zahlen $\varphi(\varrho)$, die wir mit $\varphi(\varrho), \varphi_1(\varrho), \ldots \varphi_p(\varrho)$ bezeichnen wollen. Wir hatten gezeigt, daß $\varphi_p(\varrho) = \varrho$ gewählt werden kann. Ist ψ eine beliebige Zahl von B, die nicht die p-te Potenz einer Zahl in B ist, so bestimmt die Größe $\sqrt[p]{\psi}$ einen Körper P des Grades $p(p-1)$, der B als Teiler enthält. Eine solche Größe ist für jedes k: $\varrho^k\varphi(\varrho)$. Der entsprechende Körper P ist ein Teiler des aus A, A_p und B entspringenden *Abel*schen Körpers; er ist also selber ein *Abel*scher Körper und muß mit dem Produkt aus irgendeinem A_k und B identisch sein. Es darf demnach $\varphi_k(\varrho) = \varrho^k\varphi(\varrho)$ gesetzt werden.

Nun ist $\varrho = 1-\beta$, $\varrho^2 = (1-\beta)^2 \equiv 1-2\beta \pmod{\beta^2}$ und allgemein $\varrho^k \equiv 1-k\beta \pmod{\beta^2}$. Ferner hat β die Eigenschaft, daß $1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{p-2}$ eine Basis der ganzen Zahlen von B bilden; folglich ist $\varphi \equiv a + a_1\beta \pmod{\beta^2}$, wo a_1 nach den obigen Ausführungen nicht durch p teilbar sein kann. Ist aber k so gewählt, daß $a_1 - ka \equiv 0 \pmod{p}$ ist, so ist $\varrho^k\varphi(\varrho) \equiv a \pmod{\beta^2}$, was wir als unmöglich nachgewiesen haben. Dieser Körper A_k existiert demnach nicht; da aber das Bestehen der $p+1$ verschiedenen Körper A aus dem Vorhandensein von zwei unter ihnen notwendig folgte, so ist diese Voraussetzung falsch, und wir haben bewiesen:

Es gibt nur einen zyklischen Körper des Grades p, dessen Diskriminante eine Potenz von p ist. Dieser ist ein Kreisteilungskörper.

Allgemein können wir unsere Resultate so zusammenfassen:

Die zyklischen Körper des Grades p^a, deren Diskriminante nur durch p teilbar ist, sind für $a=1$ Kreisteilungskörper; für $a>1$ enthalten sie einen Kreisteilungskörper p-ten Grades, der stets, auch im Falle $p=2$, reell ist.

Daß diese Körper selber Kreisteilungskörper sind, beweisen wir, indem wir gleichzeitig die ganze Untersuchung auf eine breitere Grundlage stellen.

5. *Produkte von zyklischen Körpern und Kreisteilungskörpern.*

Das Produkt zweier zyklischer Körper ist ein *Abel*scher Körper. Die Gruppe eines *Abel*schen Körpers hat die wichtige Eigenschaft, daß sie sich durch eine Basis darstellen läßt, d. h. es lassen sich Elemente $A, B, C, \ldots$ so auswählen, daß jedes Element sich auf eine und nur eine Weise in der Form $A^a B^b \cdots$ schreiben läßt, wo die $a, b, \ldots$ positive ganze Zahlen sind. Es läßt sich ferner stets so einrichten, daß die Ordnungen von $A, B, \ldots$ Primzahlpotenzen sind. Lassen wir ein Element aus dieser Basis fort, etwa A, so bilden die übrigen eine Gruppe, zu der ein zyklischer Körper gehört, dessen Grad mit der Ordnung von A übereinstimmt. Die so entstehenden zyklischen Körper sind teilerfremd, ihr Produkt ist der gegebene *Abel*sche Körper.

Auf diesen Sätzen baut sich die zahlentheoretische Behandlung *Abel*scher Körper auf. Wir machen davon für den Beweis eines algebraischen Hilfssatzes Gebrauch:

Haben zwei zyklische Körper A_1 und A_2 des Grades p^a einen größten gemeinsamen Teiler A', so ist ihr Produkt A auch das Produkt von A_1 und einem teilerfremden Abelschen Körper niedrigeren Grades als p^a*).

Wenn zwei Normalkörper die Grade r_1 und r_2 haben, wenn ihr Produkt den Grad r und ihr größter gemeinsamer Teiler den Grad r' hat, so besteht die Gleichung $r_1 r_2 = r r'$. Für uns habe A' den Grad p^{a-b}, dann hat A den Grad p^{a+b}. A habe die Gruppe $\mathfrak{G}$, A_1 gehöre zu der Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$; da A_1 zyklisch ist, so gibt es eine Substitution G in $\mathfrak{G}$, so daß

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G + \mathfrak{H}G^2 + \cdots + \mathfrak{H}G^{p^a-1}$$

wird. G hat demnach eine Ordnung $\geqq p^a$. Die Basis von $\mathfrak{G}$ enthält dann

*) Vgl. *Weber*, dieses Journal Bd. 132, S. 168 und Math. Ann. Bd. 67, S. 42.

ebenfalls ein Element A, dessen Ordnung $\geqq p^a$ ist, denn aus Elementen von niedrigerer Ordnung würde sich G nicht zusammensetzen lassen. Die übrigen Elemente der Basis bilden eine Gruppe der Ordnung $\leqq p^b$; dazu gehört ein zyklischer Körper des Grades $\geqq p^a$. Ist der Grad $> p^a$, so folgt aus der Gleichung $r_1 r_2 = rr'$, daß dieser Körper mit A_1 sowohl wie mit A_2 einen Teiler gemeinsam hat, dessen Grad mindestens p^{a-b+1} ist. Da er als zyklischer Körper nur einen Teiler dieses Grades haben kann, so wäre das auch ein gemeinsamer Teiler von A_1 und A_2, was unserer Voraussetzung widerspricht. Deshalb ist die Ordnung von G gleich p^a, und $\mathfrak{G}$ ist das Produkt der beiden teilerfremden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_1 = (G^x)$. Zu $\mathfrak{G}_1$ gehört ein *Abel*scher Körper A_3 des Grades $p^b < p^a$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Es kann auch leicht gezeigt werden, daß $\mathfrak{H}$ eine zyklische Gruppe, also A_3 ein zyklischer Körper ist.

Wir können jetzt die Untersuchung des vorigen Abschnittes zum Abschluß bringen: A_1 sei wieder der zyklische Kreisteilungskörper des Grades p^a, dessen Diskriminante eine Potenz von p ist (für $p = 2$ der reelle Körper dieser Art), A_2 ein anderer Körper desselben Grades mit derselben Eigenschaft. Wir haben gezeigt, daß beide mindestens einen Körper p-ten Grades gemeinsam haben. Der Körper A_3 hat dann einen Teiler p-ten Grades, dessen Diskriminante gleichfalls eine Potenz von p ist; er würde also zu A_1 nicht teilerfremd sein können, wenn $p > 2$ ist. Das widerspricht aber dem soeben bewiesenen Satz. Ist $p = 2$, so gilt entweder dasselbe, oder es ist A_3 einer der Körper $P(i)$ oder $P(i\sqrt{2})$. In jedem Falle aber ist bewiesen, daß alle diese Körper Kreisteilungskörper sind.

Dem ersten Hilfssatz stellen wir nun einen zweiten an die Seite. Es handelt sich immer um zyklische Körper des Grades p^a. Die Kreisteilungskörper sollen von nun an immer mit P bezeichnet werden. Damit alle Diskriminanten eines zyklischen Körpers vom Grade p^a durch eine Primzahl q teilbar sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Diskriminante seines Teilers vom Grade p durch q teilbar ist. Solche Primzahl q will ich in Anlehnung an eine bekannte Bezeichnung eine totalkritische Primzahl des Körpers nennen. Der zyklische Kreisteilungskörper des Grades p^a, dessen einzige totalkritische Primzahl p ist, sei P_p; für $p = 2$ werde der reelle Körper dieser Art so bezeichnet. Daraus wird dann auch die Bezeichnung P_q erklärt; wir haben im dritten Abschnitt gesehen, daß $q-1$

durch p^a teilbar sein muß. Zyklische Körper desselben Grades nennen wir kurz „zugehörige Körper". Dann können wir den zweiten Hilfssatz so aussprechen:

Hat der zyklische Körper A_1 des Grades p^a die totalkritische Primzahl q, so ist das Produkt von A_1 und dem zugehörigen Körper P_q immer auch das Produkt von P_q und einem Abelschen Körper von nicht höherem Grade, dessen Diskriminante nicht durch q teilbar ist.

Aus A_1 und P_q entspringt der *Abel*sche Körper A, dessen Grad p^{a+b} ist, wo $b \leqq a$ ist. Da der Grad nicht durch q teilbar ist, so ist die Verzweigungsgruppe von q gleich E, und die Trägheitsgruppe von q ist deshalb eine zyklische Gruppe $\mathfrak{T}$. In dem Beweise zum ersten Hilfssatze war gezeigt worden, daß die Gruppe von A zyklische Untergruppen höchstens von der Ordnung p^a haben kann. Der Trägheitskörper von q hat deshalb mindestens den Grad p^b. Da aber seine Diskriminante nicht durch q teilbar ist, so ist er zu P_q teilerfremd; das Produkt beider hat mindestens den Grad p^{a+b}, also als Teiler von A genau diesen Grad. Deshalb hat der Trägheitskörper von q genau den Grad p^b, und A ist das Produkt von P_q und diesem Trägheitskörper, der die im Hilfssatze verlangten Eigenschaften hat.

6. *Der allgemeine Abelsche Körper.*

Zu Anfang des vorigen Abschnittes wurde bemerkt, daß jeder *Abel*sche Körper das Produkt von teilerfremden zyklischen Körpern ist, deren Grade Primzahlpotenzen sind. Nur für solche Körper braucht daher der Beweis erbracht zu werden. Von ihnen handeln die soeben abgeleiteten Hilfssätze, die wir zusammenfassen können in dem Satz: *Jeder zyklische Körper des Grades p^a kommt in einem Abelschen Körper als Teiler vor, der aus einem Kreisteilungskörper und einem Abelschen Körper einfacherer Art gebildet werden kann.* Diesen letzten Körper will ich kurz den Ergänzungskörper nennen.

Hat nun A vom Grade p^a die totalkritische Primzahl q, so gibt es einen Ergänzungskörper, dessen Diskriminante nicht mehr durch q teilbar ist. Er kann wieder in teilerfremde zyklische Körper zerlegt werden, die in derselben Weise wie A behandelt werden können. Die Grade der Ergänzungskörper sind niemals größer als p^a. Schließlich geht aus diesem

Verfahren ein Ergänzungskörper hervor, in dem nur noch p totalkritische Primzahl sein kann. Auf ihn, bzw. auf seine zyklischen Teiler wird nun der erste Hilfssatz angewandt. Es ergibt sich dabei ein Ergänzungskörper, dessen Grad kleiner als p^a ist: Denn wenn A nur die totalkritische Primzahl p hat, so hat sein Teiler p-ten Grades eine nur durch p teilbare Diskriminante, ist also ein Kreisteilungskörper, und A hat mit dem zugehörigen Körper P_p einen gemeinsamen Teiler. Der Fall $p=2$ macht hier keine Ausnahme, denn für $a>1$ hat A einen reellen Teiler zweiten Grades; für $a=1$ dagegen brauchen wir den ersten Hilfssatz nicht, der zweite allein führt auf lauter Kreisteilungskörper.

Die zyklischen Körper des Grades $p^{a'}$, $a'<a$ werden nun in derselben Weise weiter behandelt; schließlich muß das Verfahren auf Körper p-ten Grades führen, die sämtlich Kreisteilungskörper sind, wenn es nicht schon vorher aus demselben Grunde abgebrochen werden konnte. In dem Produkt aller benutzten Kreisteilungskörper ist dann der gegebene *Abel*sche Körper als Teiler enthalten.

Über die explizite Darstellung aller rationalen Lösungen einer quadratischen binomischen Kongruenz mit Hilfe der Idealfaktoren des Modulus.

Von Herrn *L. v. Grosschmid* in Budapest.

Aus den Elementen der Theorie der quadratischen Zahlkörper ist bekannt, daß eine rationale ungerade Primzahl p ($(D,p)=1$ angenommen) im Körper $\Omega\left(\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right)$ ihren Primcharakter behält oder aber als Produkt zweier konjugierter Primideale ersten Grades dargestellt wird, je nachdem das *Legendre*sche Symbol $\left(\frac{D}{p}\right)=-1$ oder $=+1$ ausfällt; dabei bedeutet D die Grundzahl oder Minimal-Diskriminante des Körpers. Wenn weiter $\left(\frac{D}{p}\right)=+1$ ist und wenn man die zwei rationalen Wurzeln von $x^2\equiv D \pmod p$ kennt, so hat man auch die zwei Idealteiler von (p), und zwar in kanonischer Form. Die folgenden Zeilen haben nun den Zweck, eine Art Umkehrung des eben erwähnten elementaren Zusammenhanges klarzulegen, nämlich zu zeigen, auf welche Weise die Kenntnis aller Primideale eines jeden quadratischen Körpers zur Darstellung aller rationalen Lösungen einer beliebigen binomischen Kongruenz zweiten Grades führt.

Man betrachte die rationale Kongruenz

$$(1.) \qquad x^2\equiv r \pmod{2^k m},$$

in welcher $k\geqq 0$, $m=\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ eine beliebige ungerade natürliche Zahl bedeutet, während $(r,2^k m)=1$ und r als quadratischer Rest von $2^k m$ angenommen wird. Die Aussage (1.) ist gleichbedeutend mit den zwei folgenden:

$$(1^a.) \qquad x^2\equiv r \pmod{2^k}, \quad x^2\equiv r \pmod m.$$

Ist nun $k>0$, so muß laut Annahme $r\equiv \pm 1 \pmod 4$, also — mit

Benutzung des *Jacobi*schen Symbols — $r_1 = r + \left(\frac{-1}{m \cdot r}\right) m$ gerade und außerdem $\equiv 2 \pmod 4$ sein, d. h. r_1 hat die Form $q^2 \cdot r_0$, wo q^2 das größte in r_1 enthaltene Quadrat und auch $r_0 \equiv 2 \pmod 4$ ist. Da aber $r_1 \equiv r \pmod m$ ist, so bleibt $(r_1, m) = 1$ und r_1 Rest von m; (1^a.) geht daher über in

(1^b.) $x^2 \equiv r \pmod{2^k}$, $\quad x^2 \equiv r \equiv r_1 = q^2 r_0 \pmod m$, $\quad (r_0 \equiv 2 \pmod 4)$.

Ist aber $k = 0$, so fällt in (1^a.) die erste Kongruenz weg, und wenn dann $r \equiv 0 \pmod 4$ wäre, so kann man setzen $r_1 = (r + m) + \left(\frac{-1}{m(r+m)}\right) m$, wodurch alles auf den vorigen Fall zurückgeführt ist.

Infolge von $\left(\frac{r}{p_i}\right) = \left(\frac{r_1}{p_i}\right) = \left(\frac{q^2 r_0}{p_i}\right) = \left(\frac{r_0}{p_i}\right) = \left(\frac{4 r_0}{p_i}\right) = +1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$

hat man in $\Omega(\theta) = \Omega(\sqrt{r_0})$ für m die Idealzerlegung $(m) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i^{e_i} \mathfrak{p}_i'^{e_i}$. Es bedeute ferner $\overline{\mathfrak{p}_i}$ indefinite $\mathfrak{p}_i$ oder $\mathfrak{p}_i'$, und wir setzen $\mu_h = \prod_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{p}_i}^{e_i}$, wo der Index h sich auf die h-te Wahl bezieht, in der in bestimmter Reihenfolge für die $\overline{\mathfrak{p}_i}$ unabhängig voneinander $\mathfrak{p}_i$ oder aber $\mathfrak{p}_i'$ geschrieben wurde. Die Anzahl der so gewonnenen verschiedenen μ_h ist 2^n, welche aber — wie leicht zu sehen — in konjugierte Paare vom Typus μ_h, μ_h' gruppiert werden können, und die Anzahl dieser verschiedenen Paare ist also 2^{n-1}; da endlich für jedes h $(m) = \mu_h \cdot \mu_h'$ ist, so haben wir die folgenden 2^{n-1} verschiedenen Zerlegungen für (m): $(m) = \mu_h \cdot \mu_h' \quad (h = 1, 2, \ldots 2^{n-1})$.

Man sieht ohne weiteres ein, daß $((q\theta), (m)) = (1)$ sein muß, da anderenfalls z. B. $q\theta \equiv m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ und daher auch $q\theta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}'}$ wäre, d. h. $(q\ \theta)$ in $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'] = (p_{i_1}^{t_{i_1}} \cdot p_{i_2}^{t_{i_2}} \cdots p_{i_s}^{t_{i_s}}) = (P_s)$ enthalten sein müßte, wo $i_1, i_2, \ldots i_s$ eine Kombination s-ter Ordnung aus den Elementen $1, 2, \ldots n$ bedeutet und $t_{i_1} \leqq e_{i_1}, \ldots, t_{i_s} \leqq e_{i_s}$ ist; dies gesetzt, müßte aber $q\theta = \omega \cdot P_s$ sein, mit ganzzahligem ω aus $\Omega(\theta)$, d. h. $q^2\theta^2 = \omega^2 P_s^2 = r_1$, daher also ω auch rational und ganzzahlig, der Annahme $(r_1, m) = 1$ widersprechend. Aus dem Gesagten folgt, daß die lineare Kongruenz-Substitution

(α.) $\qquad x \equiv q\theta \cdot \xi \pmod m$

eine eindeutige ist, d. h. daß zu verschiedenen ξ-Werten auch verschiedene x-Werte gehören mod m, und vice versa. — Durch (α.) geht die zweite Kongruenz von (1^b.) in

(I.) $\qquad \xi^2 \equiv 1 \pmod m$

über.

Es sei nun f die Klassenanzahl der Ideale im Körper $\Omega(\theta)$; dann hat man sicher — eventuell auch schon für $f_1 < f \equiv 0 \pmod{f_1}$

$$\mu_h^f = (\lambda_h) \text{ und } \mu_h'^f = (\lambda_h'),$$

wo λ_h, λ_h' konjugierte ganze Zahlen aus $\Omega(\theta)$ sind*).

Da $(\mu_h, \mu_h') = (1)$ ist, so muß auch $((\lambda_h), \mu_h') = ((\lambda_h'), \mu_h) = (1)$ sein, während $\lambda_h \cdot \lambda_h' \equiv 0 \pmod{m}$ ist.

Jetzt definieren wir die arithmetische Funktion $\Phi(\lambda_h, \lambda_h')$ durch folgende Kongruenz:

(A.) $$\Phi(\lambda_h, \lambda_h') \equiv \lambda_h^{\varphi(\mu_h)} - \lambda_h'^{\varphi(\mu_h)} \pmod{m}.$$

Mit dem so eingeführten Φ betrachte man das Wertsystem

(II.) $$X_g \equiv \varepsilon \left| (2^k)^{\varphi(m)} [q\theta \cdot \Phi(\lambda_h, \lambda_h') - E] + E \right| \pmod{2^k m},$$

$(k \geqq 0; \varepsilon = \pm 1; h = 1, \ldots 2^{n-1}; g = 1, 2, \ldots 2^n \sigma)$

worin E nacheinander alle inkongruenten rationalen Wurzeln von $x^2 \equiv r \pmod{2^k}$ durchläuft, und σ die Anzahl der mod 2^k verschiedenen Lösungen dieser Kongruenz bedeutet; diese Lösungen können, wie bekannt, bei beliebigem $k \geqq 0$, durch Auflösung einer Reihe linearer Kongruenzen, also *explizite* gefunden werden.

Ich behaupte nun, daß die X_g — deren Anzahl $2^n \cdot \sigma$ ist — die gesuchten Darstellungen aller mod $2^k m$ inkongruenten rationalen ganzen Lösungen von $x^2 \equiv r \pmod{2^k m}$ liefern.

Zu diesem Ende muß ich beweisen, daß die nachstehenden Relationen allgemeine Geltung haben:

a) $X_g^2 \equiv r \pmod{2^k m}$, $(g = 1, 2, \ldots 2^n \sigma)$

b) $X_{g_1} \not\equiv X_{g_2} \pmod{2^k m}$, wenn nicht $g_1 = g_2$, d. h. gleichzeitig $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $h_1 = h_2$, $E_1 \equiv E_2 \pmod{2^k}$ ist,

c) $X_g =$ einer rationalen ganzen Zahl.

Um diese Aussagen zu verifizieren, verfahren wir wie folgt: Sind die Kongruenzen (1ª.) gleichzeitig erfüllt, so ist auch a) wahr. Nach dem Modulus 2^k genommen, ist das evident, da alsdann aus (II.) folgt: $X_g^2 \equiv E^2 \equiv r \pmod{2^k}$; nach dem Modulus m bekommen wir:

$$X_g^2 \equiv r \cdot [\Phi(\lambda_h, \lambda_h')]^2 \pmod{m};$$

---

*) Es ist auch leicht zu zeigen, daß man in der Kongruenz $x^2 \equiv r \pmod{m}$, r immer von solcher Konstruktion annehmen darf, daß $f = 2 \cdot \sum_1^3 \left(\frac{s}{P}\right)$ wird, mit $D < 0$, $P = -\frac{D}{8}$, $(s, P) = 1$, $\frac{P}{8} < s < \frac{3P}{8}$.

da aber

$$\lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu'_h}, \quad \lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu_h},$$

so muß auch

$$(\lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} - 1)(\lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)} - 1) = \lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} \cdot \lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)} + 1 - (\lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} + \lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)})$$
$$\equiv 1 - \lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} - \lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)} \equiv 0 \pmod{m}$$

sein; folglich ist

$$[\Phi(\lambda_h, \lambda'_h)]^2 = \lambda_h^{2\varphi(\mu_h)} + \lambda_h'^{2\varphi(\mu_h)} - 2 \cdot \lambda_h^{\varphi(\mu_h)} \cdot \lambda_h'^{\varphi(\mu_h)} \equiv 1 \pmod{m}$$

und schließlich

$$X_g^2 \equiv r \pmod{m},$$

wie hehauptet wurde.

Um den Beweis von b) zu führen, sei erstens $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$; sollte dann $X_{g_1} \equiv X_{g_2} \pmod{2^k m}$ sein können, so müßten wir haben

$$\Phi(\lambda_{h_1}, \lambda'_{h_1}) \equiv -\Phi(\lambda_{h_2}, \lambda'_{h_2}) \pmod{m};$$

ist nun $h_1 = h_2 = h$, so bekommt man $1 \equiv 0 \pmod{\mu'_h}$, was augenscheinlich absurd ist; ebenso, wenn $h_1 \neq h_2$ ist, wird, — da

$$\lambda_{h_2}^{\varphi(\mu_{h_2})} + \lambda_{h_2}'^{\varphi(\mu_{h_2})} \equiv 1 \pmod{\mu'_{h_1}}$$

ist —,

$$\lambda_{h_2}^{\varphi(\mu_{h_2})} \equiv 0 \pmod{\mu'_{h_1}};$$

es ist aber nach Annahme $\mu'_{h_1} \neq \mu_{h_2}$, und μ'_{h_1}, μ_{h_2} enthalten beide eine gleiche Anzahl von Primidealfaktoren, also hat μ'_{h_1} bestimmt einen Primidealfaktor π'_{h_1}, der nicht in μ_{h_2} aufgeht; aus der letzten Kongruenz folgt aber, daß diesen auch $(\lambda_{h_2}) = \mu'_{h_2}$, also auch μ_{h_2} enthält, woraus der Widerspruch klar wird. Es muß also bei der über X_{g_1}, X_{g_2} gemachten Annahme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ sein. Ist nun $E_1 \not\equiv E_2 \pmod{2^k}$ und trotzdem $X_{g_1} \equiv X_{g_2} \pmod{2^k m}$, so müßte nach (II.) auch $E_1 \equiv E_2 \pmod{2^k}$ sein, gegen die Prämissen des Satzes. Endlich werde also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $E_1 \equiv E_2 \pmod{2^k}$, $h_1 \neq h_2$ und $X_{g_1} \equiv X_{g_2} \pmod{2^k m}$ angenommen. Man bekommt aus (II.), ähnlich wie früher, $\Phi(\lambda_{h_1}, \lambda'_{h_1}) \equiv \Phi(\lambda_{h_2}, \lambda'_{h_2}) \pmod{m}$, woraus mit Rücksicht auf die Kongruenz

$$\lambda_{h_2}^{\varphi(\mu_{h_2})} + \lambda_{h_2}'^{\varphi(\mu_{h_2})} \equiv 1 \pmod{\mu_{h_1}},$$

folgt, daß

$$\lambda_{h_2}^{\varphi(\mu_{h_2})} \equiv 0 \pmod{\mu_{h_1}}$$

sein muß; da aber $\mu_{h_1} \neq \mu_{h_2}$, so ist die oben in dem analogen Falle angewandte Schlußweise wörtlich anwendbar; damit ist b) in allen Teilen bewiesen.

Um die Wahrheit von c) einzusehen, braucht man nur $\lambda_h = a_h + b_h \cdot \theta$,

$\lambda'_h = a_h - b_h \cdot \theta$ zu setzen, worin die a_h, b_h rational und ganz sind, und, mit Rücksicht auf die Gleichung $\varphi(\mu_h) = \varphi(\mu'_h)$, $\theta \cdot \Phi(\lambda_h, \lambda'_h)$ nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln. Dadurch tritt in Evidenz, daß die rechte Seite von (II.) nur formell nicht-rational ist, worin eben der Beweis von c) besteht.

Endlich beachte man, daß in dem speziellen Falle, wo es sich um die Darstellung der Lösungen von

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2^k m}$$

handelt, analoge detaillierte Betrachtungen zum folgenden Wurzelsystem führen:

$$\begin{aligned} X_g &\equiv E + [\Phi(a,b) - E] \cdot 2^{k\varphi(m)} \\ &\equiv \Phi(a,b) + [E - \Phi(a,b)] \cdot m^{2^{k-1}} \pmod{2^k m}, \end{aligned}$$

wo E die Reihe der Wurzeln von $x^2 \equiv 1 \pmod{2^k}$, während die rationalen ganzen Argumente a, b alle verschiedenen Zahlenpaare, für welche $a \cdot b = m$, $(a,b) = 1$ ist, durchlaufen; dabei sind aber die zwei Zerlegungen $a \cdot b$ und $b \cdot a$ als nicht identisch zu betrachten.

Über kürzeste Abstände und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff in der Theorie der Raumkurven und Flächen.

Von Herrn *W. Fr. Meyer* in Königsberg i. Pr.

Den Untersuchungen*), über die im folgenden kurz berichtet wird, liegt eine Verallgemeinerung des üblichen Krümmungsbegriffes für Raumkurven zugrunde.

Man ordne jedem Punkte P einer reellen Raumkurve c eindeutig eine durch ihn gehende reelle, in bestimmtem Sinne gerichtete Gerade g zu, so daß diese Geraden g eine willkürlich durch c gelegte Regelfläche (g) erzeugen, deren Striktionslinie mit c_g bezeichnet sei. Ferner sei dv_g der Kontingenzwinkel zwischen g und der einem zu P benachbarten Kurvenpunkte Q zugehörigen Erzeugenden und ds das Bogenelement von c, so stellt der Grenzwert $k_g = \frac{1}{r_g} = \frac{dv_g}{ds}$, bis auf das Vorzeichen, die „auf g bezügliche (erste) Krümmung“ von c in P dar.

Sind $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g$, die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Richtungskosinus von g, als Funktionen des Bogens s gedacht, über deren Stetigkeit, Differenzierbarkeit usf. die erforderlichen Voraussetzungen zu

*) Vgl. die ausführliche, im Verlag von *B. G. Teubner* in einiger Zeit erscheinende Bearbeitung, auf die auch bezüglich weiterer literarischer Nachweise verwiesen sei. Der Verfasser hat den Gegenstand zuerst in einer Vorlesung vom Sommer 1907 behandelt; weitere Ausführungen bringt die Königsberger Dissertation von *B. Arndt* „Über die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven“ (1908), s. auch den Auszug in den Wiener Monatsh. f. Math. u. Phys. 1909.

Die Entwickelungen des Textes lassen sich auch mit einigen Modifikationen auf das komplexe Gebiet übertragen.

machen sind, und gibt ein Akzent stets die Differentiation nach s an, während das Zeichen Σ, wie üblich, die Summation über die drei Koordinaten andeutet, so ergibt sich für k_g bei Anwendung der bekannten Methode:

$$(1^{a}.) \qquad k_g = \frac{1}{r_g} = \sqrt{\Sigma \alpha_g'^2}.$$

Dieser Wert geht im besondern über in die gewöhnliche oder „kanonische" (erste) Krümmung $k = \frac{1}{r} = \sqrt{\Sigma \alpha'^2}$, wenn man die Richtung $(\alpha_g, \beta_g, \gamma_g)$ von g mit der positiven (einem positiven ds entsprechenden) Richtung (α, β, γ) der Tangente t in P zusammenfallen läßt.

Solange g als eine primäre Richtung betrachtet wird, empfiehlt es sich, k_g ($1^{a}.$) als positiv anzunehmen, während für gewisse, aus g abgeleitete Richtungen das Vorzeichen der Quadratwurzel in ($1^{a}.$) vorbehalten bleibe. Wie zur Tangente t, gehört auch zu einer beliebigen Richtung g durch P ein „begleitendes Dreikant".

Man lege zu dem Behuf durch P eine Parallele zu der benachbarten, durch Q laufenden Erzeugenden, so bestimmt diese Parallele zusammen mit g eine Ebene Σ_g, die „zu g gehörige Schmiegungsebene", deren Gleichung, in leicht verständlicher Abkürzung, lautet:

$$(2^{a}.) \qquad \Sigma_g \equiv |\xi - x, \alpha_g, \alpha_g'| = 0.$$

Hier bedeuten x, y, z die Koordinaten von P, ξ, η, ζ die eines laufenden Punktes der Ebene. Die in Σ_g durch P senkrecht zu g gezogene Gerade h_g heiße die „Hauptnormale von g"; für ihre Richtungskosinus l_g, m_g, n_g gilt:

$$(3.) \qquad l_g = r_g \alpha_g', \quad m_g = r_g \beta_g', \quad n_g = r_g \gamma_g',$$

wobei durch das positive Vorzeichen von r_g zugleich der positive Sinn von h_g festgelegt werde.

Das Lot b_g von Σ_g in P liefert die „Binormale von g"; legt man den positiven Sinn von b_g dadurch fest, daß die Richtungskosinus λ_g, μ_g, ν_g von b_g an die Relation:

$$(4.) \qquad |\alpha_g l_g \lambda_g| = +1$$

gebunden sind, so hat man für die λ_g, μ_g, ν_g die Werte:

$$(5.) \qquad \lambda_g = r_g \begin{vmatrix} \beta_g & \beta_g' \\ \gamma_g & \gamma_g' \end{vmatrix}, \quad \mu_g = r_g \begin{vmatrix} \gamma_g & \gamma_g' \\ \alpha_g & \alpha_g' \end{vmatrix}, \quad \nu_g = r_g \begin{vmatrix} \alpha_g & \alpha_g' \\ \beta_g & \beta_g' \end{vmatrix}.$$

Die drei positiven Richtungen von g, h_g, b_g bilden „das g begleitende Dreikant" der Kurve; die beiden weiteren Ebenen desselben außer Σ_g sind

die „rektifizierende Ebene“ $P_g(g, b_g)$ und die „Normalebene“ $N_g(h_g, b_g)$ von g, deren Gleichungen lauten:

$$(2^b.)\quad P_g \equiv |\xi - x, \lambda_g, \alpha_g| = 0; \qquad (2^c.)\quad N_g \equiv |\xi - x, l_g, \lambda_g| = 0.$$

Die zu h_g gehörige, ebenfalls positiv zu nehmende Krümmung $\mathfrak{k}_g = \frac{1}{\mathfrak{r}_g}$:

$$(1^c.)\qquad \mathfrak{k}_g = \frac{1}{\mathfrak{r}_g} = +\sqrt{\Sigma l_g'^2}$$

heiße die „Totalkrümmung von g“, und die zu b_g gehörige Krümmung $\varkappa_g = \frac{1}{\varrho_g}$:

$$(1^b.)\qquad \varkappa_g = \frac{1}{\varrho_g} = \pm\sqrt{\Sigma \lambda_g'^2}$$

die „zweite Krümmung von g“.

Die drei Krümmungen von g unterliegen der Relation:

$$(6.)\qquad \mathfrak{k}_g^2 = k_g^2 + \varkappa_g^2,$$

während sich $\varkappa_g$ einschließlich des Vorzeichens berechnet aus:

$$(7.)\qquad \Delta_g \equiv |\alpha_g \alpha_g' \alpha_g''| = \frac{1}{r_g^2 \varrho_g},$$

und $\mathfrak{k}_g$ auf Grund von $(1^a.)$ und (7.) bestimmt wird. Für die ersten Ableitungen der Richtungskosinus von g, h_g, b_g gelten „die verallgemeinerten *Frenet*schen Formeln“; indem wir uns von jetzt ab der Kürze halber stets auf die erste von drei, den drei Koordinaten korrespondierenden Formeln beschränken, ergibt sich*):

$$(8^a.)\qquad \alpha_g' = \frac{l_g}{r_g}; \qquad (8^b.)\quad \lambda_g' = -\frac{l_g}{\varrho_g}; \qquad (8^c.)\quad l_g' = -\frac{\alpha_g}{r_g} + \frac{\lambda_g}{\varrho_g}.$$

Wie sofort ersichtlich, gehen hieraus die „kanonischen“ *Frenet*schen Formeln einfach durch Weglassung des Index g hervor, und umgekehrt.

Als „Krümmungswinkel ω_g von g“ werde derjenige positive resp. negative spitze Winkel definiert, der bestimmt ist durch:

$$(9.)\qquad \operatorname{tang} \omega_g = \frac{r_g}{\varrho_g}.$$

Die „*Frenet*schen Formeln“ (8.) gestatten eine einfache geometrische Deutung, wenn man sich der sphärischen Abbildung bedient, nur daß diese der Reihe nach auf die positiven Richtungen von g, h_g, b_g anzuwenden ist.

*) Diese Formeln, nebst (1.), (6.), (7.) und anderen, lassen sich in überraschend einfacher Weise auf den R_n ausdehnen, vgl. eine kürzlich im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 19, S. 160 (Mai 1910) erschienene Note, sowie zwei sich daran anschließende ebenda demnächst erscheinende Noten der Herren *Rath* und *Hazzidakis*.

Man lege etwa um den Anfangspunkt O die Einheitskugel K_e vom Radius 1 und durch O, z. B. im ersten Falle, zu den Richtungen g Parallele; deren Schnittpunkte G mit der Kugel durchlaufen eine Kurve $c_g^{(e)}$, das sphärische Bild der Richtungen g oder auch der Regelfläche (g).

Dann liefern die Formeln (8.) sofort eine durchsichtige geometrische Konstruktion der Tangente der drei Bildkurven von resp. $(g), (h_g), (b_g)$, jeweils in dem P entsprechenden Kugelpunkte.

Versteht man weiter unter $\frac{1}{r_g^{(e)}}, \frac{1}{\varrho_g^{(e)}}$ die kanonische erste resp. zweite Krümmung der Bildkurve $c_g^{(e)}$, so gelten für sie die wichtigen Gesetze:

$$(10^{a}.) \qquad r_g^{(e)} = \frac{\mathfrak{r}_g}{r_g} = \cos\omega_g; \qquad (10^{b}.) \quad \frac{1}{\varrho_g^{(e)}} = r_g\omega_g',$$

von denen sich zahlreiche Anwendungen machen lassen.

Man ziehe jetzt den, mit geeignetem Vorzeichen zu versehenden kürzesten Abstand δ_g der beiden, durch benachbarte Kurvenpunkte P, Q gehenden Geraden g heran. Auf Grund der Elementarformel für den kürzesten Abstand zweier Geraden ergibt sich im vorliegenden Falle, wenn man sich die $dx, \ldots$ und $d\alpha_g, \ldots$ in hinreichend weit fortzusetzende Potenzreihen nach ds entwickelt denkt:

$$(11.) \quad \frac{\delta_g}{ds}\cdot\frac{1}{r_g} = \left|\alpha + \frac{1}{2}\alpha' ds + \frac{1}{6}\alpha'' ds^2 + \cdots, \alpha_g, \alpha_g' + \frac{1}{2}\alpha_g'' ds + \frac{1}{6}\alpha_g''' ds^2 + \cdots\right|.$$

Bezeichnet man ferner mit e_g den, ebenfalls mit geeignetem Vorzeichen zu nehmenden Abstand zwischen P und dem Fußpunkte — Treffpunkte von g mit der Striktionslinie c_g — Π_g von δ_g, so gelangt man, wiederum auf Grund einer zweckmäßig umgestalteten Elementarformel, zu der Darstellung:

$$(12.) \quad \frac{e_g}{r_g} = \left|\alpha + \frac{1}{2}\alpha' ds + \frac{1}{6}\alpha'' ds^2 + \cdots, \alpha_g + \alpha_g' ds + \frac{1}{2}\alpha_g'' ds^2 + \cdots, A_g\right|.$$

Hier bedeuten A_g, B_g, C_g die Richtungskosinus von δ_g; für sie bestehen, unter q einen Proportionalitätsfaktor verstanden, der sich durch die Relation $\Sigma A_g^2 = 1$ bestimmt, die Reihenentwickelungen:

$$(13.) \qquad qA_g = \begin{vmatrix}\beta_g\gamma_g\\ \beta_g'\gamma_g'\end{vmatrix} + \frac{1}{2}ds\begin{vmatrix}\beta_g\ \gamma_g\\ \beta_g''\ \gamma_g''\end{vmatrix} + \frac{1}{6}ds^2\begin{vmatrix}\beta_g\ \gamma_g\\ \beta_g'''\ \gamma_g'''\end{vmatrix} + \cdots .$$

Behufs vollständiger Übersicht über das Verhalten zweier benachbarter Geraden g zueinander ist den beiden Formelreihen (11.), (12.) noch eine dritte hinzuzufügen. Bezeichnet ε_g den Abstand des Punktes Q von der

zu g in P gehörigen Normalebene N_g (2°.), so ergibt sich ohne weiteres:

$$(14.) \qquad \frac{\varepsilon_g}{ds} = \left|\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'' ds + \frac{1}{6}\alpha''' ds^2 + \cdots, \alpha_g, l_g\right|,$$

wo sich das Vorzeichen von ε_g von selbst durch die rechte Seite bestimmt.

Den drei Formelreihen (11.), (12.), (14.) gehen zwei weitere ähnlich gebaute zur Seite, die entstehen, indem man g ersetzt durch ihre Hauptnormale h_g, resp. Binormale b_g.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns in der Hauptsache auf (11.), (12.), (14.).

Denkt man sich die jeweils rechts stehende Determinante wiederum selbst nach steigenden Potenzen von ds entwickelt und diese Entwickelungen je so weit fortgesetzt, bis man zu einem ersten nicht verschwindenden Koeffizienten gelangt, so wird beim Grenzübergange jeder der Abstände δ, e, ε einer ganz bestimmten natürlichen (inkl. der nullten) Potenz von ds genau proportional. Hierbei vollzieht sich von selbst die Einteilung nach einem „allgemeinen Falle“ und nach „Besonderheiten verschiedener Stufen“, je nach der Natur der zugrunde gelegten Richtung g, und eventuell auch der Raumkurve selbst.

Die verschiedenen zu (11.), (12.), (14.) gehörigen Ergebnisse findet man in der Tabelle*) (I.) vereinigt; es genüge daher, auf einige Momente von Interesse hinzuweisen.

Da kommt in erster Linie das Hauptgesetz für die kürzesten Abstände δ_g in Betracht: *„Der kürzeste Abstand δ_g zweier benachbarter Erzeugenden einer durch eine Raumkurve gelegten Regelfläche (g) ist entweder („allgemeiner Fall“) genau der ersten Potenz des Bogenelementes ds proportional, oder aber („Besonderheit erster Stufe“) der dritten Potenz von ds, oder endlich („Besonderheit zweiter Stufe“) er verschwindet absolut.“*

In dem Ausnahmefalle paralleler Geraden g, d. i. eines Zylinders (g), tritt zwar auch das „allgemeine“ Gesetz ein, jedoch ist alsdann der Grenzwert $\frac{\delta_g}{ds}$ von spezifischer Beschaffenheit.

Ein absolutes Verschwinden von δ_g findet nur in den beiden tri-

*) Die zu diesem Auszuge gehörigen Tabellen sind am Schlusse zusammengestellt.

vialen Fällen statt, wenn entweder ein Kegel (g) vorliegt, oder aber die Kurve c in einer Ebene liegt, der zugleich die Geraden g angehören.

Bei der Besonderheit erster Stufe*) werden die Geraden g Tangenten der Striktionslinie c_g; man bedient sich alsdann der Ausdrücke: „je zwei benachbarte Gerade g *treffen* sich, die Regelfläche (g) wird zu einer abwickelbaren mit der Gratlinie c_g".

Geht man umgekehrt von zwei benachbarten Tangenten t irgend einer Raumkurve c aus, so befolgt der kürzeste Abstand δ_t das grundlegende Gesetz:

$$\frac{\delta_t}{ds^3} = -\frac{1}{12}\frac{1}{r\varrho}, \tag{15.}$$

und die zugehörigen Abstände e_t, ε_t die noch einfacheren:

$$e_t = \frac{1}{2}ds, \quad \varepsilon_t = ds. \tag{16.}$$

Wendet man (15.) wiederum auf die Gratlinie c_g einer durch die Kurve c gelegten abwickelbaren Fläche an, und sind r_{c_g}, ϱ_{c_g} Krümmungsradius und Torsionsradius von c_g im Berührungspunkte Π_g mit g, so besteht die Proportion:

$$r_g : \varrho_g = r_{c_g} : \varrho_{c_g}. \tag{17.}$$

Kehren wir zu einer beliebigen Regelfläche (g) durch c zurück, so sei hinsichtlich des Abstandes $e_g = P\Pi_g$ erwähnt, daß derselbe zwar „im allgemeinen" endlich ist, „im besonderen" dagegen je nachdem der ersten, zweiten und sogar dritten Potenz von ds proportional werden kann; das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn die Kurve eine konstante Torsion $\frac{1}{\varrho}$ besitzt und zudem die Geraden g mit den Binormalen b zusammenfallen.

Die zur Untersuchung der verschiedenen Fälle von e_g erforderlichen Rechnungen gestalten sich infolge der in (12.) zu substituierenden Entwickelungen (13.) etwas kompliziert.

Endlich sind die Abstände ε_g je nachdem der ersten, zweiten, dritten Potenz von ds proportional.

Wendet man die geeignet herauszugreifenden Formeln der Tabelle (I.)

*) Denkt man sich die Regelfläche als das Primäre, wobei aber die Bedeutung des Gegenstandes nicht genügend hervortritt, so läßt sich das Kriterium des Textes in ein bekanntes umformen.

der Reihe nach auf die kanonischen Fälle der Tangente t, der Binormale b, und der Hauptnormale h an, so geht die engere Tabelle (1.) hervor, bei der jeder der zu einer beliebigen Geraden g gehörigen Typen wenigstens einmal vertreten ist.

Zwischen den neun kanonischen Abständen δ, e, ε besteht eine Reihe merkwürdiger Beziehungen, die sich ohne weiteres der Tabelle (1.) entnehmen lassen. Umgekehrt lassen sich die beiden Krümmungen $\frac{1}{r}, \frac{1}{\varrho}$, nebst dem Bogenelement ds, in mannigfaltiger Weise durch gewisse jener neun Abstände ausdrücken, resp. definieren.

Von den drei Abständen e_t, e_b, e_h ist nur der letzte endlich und führt zur „Hauptstriktionslinie" von c, d. i. zur Striktionslinie c_h der von den Hauptnormalen h gebildeten Regelfläche.

Die wichtigste Spezialisierung der Tabelle (I.) tritt ein, wenn man der Geraden g die Bedingung auferlegt, stets auf der zugehörigen Tangente t von c senkrecht zu stehen. Für diesen spezifischen Fall mögen bezeichnet werden: die Gerade g mit p, ihre Richtungskosinus mit a, b, c, und das p begleitende Dreikant als „ein assoziiertes Dreikant" der Kurve. Die Kosinus der neun Winkel, die die Kanten eines derartigen Dreikants mit denen des kanonischen Dreikants bilden, lassen sich einfach durch die Kosinus und Sinus der beiden, je in positivem Sinne zu durchlaufenden Winkel $H = (h, p)$ und $\tau = (t, b_p)$ ausdrücken, die selbst noch an die Relation gebunden sind:

$$(18.) \qquad r_p \cos H + r \sin \tau = 0.$$

Auch die Ableitungen H' und τ' gestatten eine einfache Darstellung, nämlich:

$$(19^a.) \qquad H' = \frac{\cos \tau}{r_p} - \frac{1}{\varrho}, \qquad (19^b.) \qquad \tau' = -\frac{\sin H}{r} + \frac{1}{\varrho_p}.$$

Weiter sind von Bedeutung drei Unterfälle (A.), (B.), (Γ.) für die Geraden p: sie gehen hervor, wenn von den Kosinus und Sinus der Winkel H, τ irgendeiner identisch verschwindet:

$$(A.) \quad \cos \tau = 0; \qquad (B.) \quad \sin \tau \equiv \cos H = 0; \qquad (\Gamma.) \quad \sin H = 0.$$

Jeder dieser drei Unterfälle weist noch zwei gleichberechtigte Untermöglichkeiten auf, sodaß es genügt, sich auf je eine derselben zu beschränken.

Die mit jedem der drei Unterfälle (A.), (B.), (Γ.) verknüpften spezifischen Werte der δ, e, ε findet man in den drei korrespondierenden Ta-

bellen (A.), (B.), (Γ.), während der Fall „allgemeiner" Geraden p aus der Tabelle (II.) ersichtlich ist.

Überdies ist jedem der drei Unterfälle eine Reihe charakteristischer Relationen eigentümlich. So führt die sphärische Abbildung im ersten und dritten Falle zu wichtigen Beziehungen zwischen den Krümmungen, nämlich im Falle (A.) zu:

$$(20.) \qquad \frac{1}{r_p}\cdot\frac{1}{r_p^{(e)}}=\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r_p}\cdot\frac{1}{\varrho_p^{(e)}}=\frac{1}{\varrho},$$

und im Falle (Γ.) zu:

$$(21.) \qquad \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r_t^{(e)}}=\frac{1}{r_h}, \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\varrho_t^{(e)}}=\frac{1}{\varrho_h}.$$

Die Formelpaare (20.), (21.) gehen, wie überhaupt die beiden Fälle (A.) und (Γ.), ineinander über, falls man durchweg die Richtungen p und t miteinander vertauscht; dementsprechend bezieht sich auch die sphärische Abbildung im ersteren Falle auf die Geraden p, im letzteren auf die Tangenten t von c.

Diese Entwickelungen über die Geraden $p(\perp t)$ gewinnen eine unmittelbare Bedeutung für die Flächentheorie bei der weiteren Spezialisierung, daß man sich durch die Raumkurve c irgendeine Fläche F derart gelegt denkt, daß die positiven Normalen von F in den Punkten P von c mit den vorgegebenen positiven Richtungen der p übereinstimmen. Umgekehrt denke man sich lieber, wie üblich, eine Fläche F beliebig gegeben und auf ihr irgendeine Kurve c, und lasse alsdann die Richtungen p in die der positiven Flächennormalen längs c fallen. Das die Flächennormale p längs c begleitende Dreikant (p, h_p, b_p) heiße jetzt schlechthin „*das* assoziierte Dreikant" der Flächenkurve. Die oben erwähnten Hilfsbeziehungen zwischen assoziiertem und kanonischem Dreikant gehen dadurch in solche über, die im wesentlichen bekannt sind, indessen dürften die Formeln (19.), (20.), (21.) neu sein.

Aber auch die bekannten Formeln erhalten rückwärts bei ihrer Übertragung auf ein beliebiges assoziiertes Dreikant einer Raumkurve eine allgemeinere Bedeutung.

Die positive Richtung von b_p fällt nunmehr bei der Flächenkurve c in die positive Richtung der zu t in P konjugierten Flächentangente t_k.

Die beiden auf die Flächennormale p bezüglichen Krümmungen $\frac{1}{r_p}, \frac{1}{\varrho_p}$ mögen „erste, resp. zweite Normalenkrümmung*)" von c in P heißen; gerade ihre systematische Einführung darf als ein wesentliches Moment für eine Weiterentwickelung der Flächentheorie angesehen werden.

Den drei obigen Unterfällen (A.), (B.), (Γ.) korrespondieren jetzt die drei ausgezeichneten Flächenkurven: die Krümmungslinien, die Haupttangentenkurven und die geodätischen Linien.

Die bereits öfters behandelte Frage nach dem Verhalten benachbarter Flächennormalen längs einer Krümmungslinie erfährt durch die Tabelle (A.) eine systematische Erledigung.

Für eine beliebige Flächenkurve c treffen sich je zwei benachbarte konjugierte Tangenten: der Treffpunkt durchläuft die „zu c konjugierte" Raumkurve

Zwischen Krümmungslinien und geodätischen Linien besteht die oben betonte, bisher wohl wenig beachtete reziproke Beziehung zwischen den Fällen (A.) und (Γ.), die u. a. in den beiden Formelpaaren (20.), (21.) einen unmittelbaren Ausdruck findet.

Die Tabellen (II.), (A.), (B.), (Γ.) gelten mit geringen Modifikationen sowohl für den allgemeineren Fall einer durch eine Raumkurve c gelegten Regelfläche (p), wie für den besonderen Fall einer Flächenkurve c.

Überhaupt darf man die Regelflächen (p) als ein verallgemeinertes Abbild der Flächenkurven betrachten.

Tabellen.

Tabelle (I.) *der Abstände* $\delta_g, e_g, \varepsilon_g$ *für zwei benachbarte Erzeugende* g *einer durch eine Raumkurve* c *gelegten Regelfläche.*

δ_g

(Ia.) $ds\,\Sigma\alpha\lambda_g = ds\cos(t,b_g)\,(\neq 0)$ (allgemeiner Fall);
in dem Ausnahmefalle paralleler Geraden g wird:

(Ia$_1$.) $\delta_g = ds\sin(t,g)$;

(Ia′.) $\frac{1}{12}\frac{ds^3}{r_g\varrho_g}[\{r_g\sin(g,t)\}' - \cos(g,t)] = -\frac{1}{12}\frac{ds^2\,d\sigma_g}{r_g\varrho_g} = -\frac{1}{12}ds^2\frac{r_{c_g}}{r_g^2\varrho_g}$
(Besonderheit erster Stufe „$t \perp b_g$": Fall einer abwickelbaren

*) Diese beiden Größen gestatten, bei Zugrundelegung geeigneter fundamentaler Flächenformen, eine einfache invariante Darstellung.

Fläche (g), $d\sigma_g$ Bogenelement und r_{c_g} Krümmungsradius von deren Gratlinie c_g);

(Ia″.) Absolut gleich Null (Besonderheit zweiter Stufe, für den Fall eines Kegels (g), sowie bei ebener Kurve c, wenn die Geraden g überdies in der Ebene von c liegen).

e_g

(Iα.) $-r_g \Sigma \alpha l_g = -r_g \cos(t,h_g) (\neq 0)$ (allgemeiner Fall); im Falle (Ia′.) ist $e_g = -r_g \sin(g,t)$;

(Iα′.) $\frac{1}{2} ds \Sigma \alpha \alpha_g = \frac{1}{2} ds \cos(t,g) (\neq 0)$ (Besonderheit erster Stufe „$t \perp h_g$“);

(Iα″.) $\frac{1}{12} ds^2 \frac{\varrho'}{r} (\neq 0)$ (Besonderheit zweiter Stufe „$t \perp g, t \perp h_g$, i. e. $g = b$*)“);

(Iα‴.) $\frac{1}{12} ds^3 \frac{1}{r|\varrho|}$ (Besonderheit dritter Stufe „$g = b, \varrho' = 0$“).

ε_g

(IA.) $ds \Sigma \alpha \alpha_g = ds \cos(t,g) (\neq 0)$ (allgemeiner Fall);

(IA′.) $\frac{1}{2r} ds^2 \cos(h,g) = \frac{1}{2r} ds^2 \sin(g,b) = \frac{1}{2r_g} ds^2 \sin(b_g,t) (\neq 0)$ (Besonderheit erster Stufe „$g \perp t$“);

(IA″.) $\frac{1}{6} \frac{ds^3}{r\varrho}$ (Besonderheit zweiter Stufe „$t \perp g$, $t \perp h_g$, i. e. $g = b$“).

Tabelle (1.) *der kanonischen Abstände* δ, e, ε *für die Tangente* t, *die Binormale* b, *die Hauptnormale* h.

	t	b	h
δ	$-\frac{1}{12} \frac{ds^3}{r\varrho}$	$\pm ds (\varrho \gtrless 0)$	$ds \cdot \sin \omega = ds \frac{\mathfrak{r}}{\varrho}$
e	$\frac{1}{2} ds$	$\frac{1}{12} ds^2 \frac{\varrho'}{r}$; im Sonderfalle $\varrho' = 0$: $\frac{1}{12} ds^3 \frac{1}{r\|\varrho\|}$	$\frac{\mathfrak{r}^2}{r} = \mathfrak{r} \cos \omega = r \cos^2 \omega = \frac{1}{2} \varrho \sin 2\omega$
ε	ds	$\frac{1}{6} \frac{ds^3}{r\varrho}$	$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{r}$

*) Eine Bezeichnung, wie $g = b$, gibt kurz an, daß die Richtung von g in die (positive) von b fällt.

Tabelle (II.) *der Abstände* δ, e, ε *für eine allgemeine*) Flächenkurve.*

	p	$b_p = t_k$	h_p
δ	$ds\cos\tau$	$-\frac{1}{12}ds^3\frac{u-v'}{r_p\varrho_p} =$ $(u=\cos\tau,\ v=r_p\sin\tau=e_{b_p})$ $-\frac{1}{12}d\sigma_{b_p}\frac{ds^2}{r_p\varrho_p}=-\frac{1}{12}ds^3 r_{c_{b_p}}\frac{1}{r_p\varrho_p^2}$, nebst $\varrho_p : r_p = r_{c_{b_p}} : \varrho_{c_{b_p}}$ ($d\sigma_{b_p}$ Bogenelement, $r_{c_{b_p}}, \varrho_{c_{b_p}}$ Krümmungsradius und Torsionsradius der Gratlinie c_{b_p} der abwickelbaren Fläche (b_p))	$ds\frac{\mathfrak{r}_p}{r_p}\cos\tau$ $=ds\cos\omega_p\cos\tau$
e	$-r_p\sin\tau$	$\varrho_p\sin\tau$	$-\frac{\mathfrak{r}_p^2}{\varrho_p}\cos\tau=-\mathfrak{r}_p\sin\omega_p\cos\tau$ $=-\frac{1}{2}r_p\sin 2\omega_p\cos\tau$
ε	$-\frac{1}{12}ds^2\frac{\sin\tau}{r_p}$ $=\frac{1}{2}ds^2\frac{\cos H}{r}$	$ds\cos\tau$	$ds\sin\tau$

Tabelle (A.) *der Abstände* δ, e, ε *für eine Krümmungslinie* $\left(\cos\tau=0:\ t=+h_p,\ \sin\tau=1,\ r_p=-\frac{r}{\cos H},\ \varrho_p=\frac{r}{\sin H},\ \mathfrak{r}_p=r,\ H+\omega_p=\pi,\ \frac{1}{\varrho}=\omega_p'\right)$.

	p	$b_p = t_k$	$h_p = +t$
δ	$\frac{1}{12}ds^3\frac{r_p'}{r_p\varrho_p}=-\frac{1}{12}ds^2 d\sigma_p\frac{1}{r_p\varrho_p}=$ $-\frac{1}{12}ds^3 r_{c_p}\frac{1}{r_p^2\varrho_p}$, nebst $r_p:\varrho_p=r_{c_p}:\varrho_{c_p}$ ($d\sigma_p$ Bogenelement, r_{cp} Krümmungsradius und ϱ_{c_p} Torsionsradius der Gratlinie c_p der abwickelbaren Fläche (p)).	$\frac{1}{12}ds^3\frac{\varrho_p'}{r_p\varrho_p}$, im übrigen analog wie bei δ_p	$-\frac{1}{12}ds^3\frac{1}{r\varrho}$
e	$-r_p=\frac{r}{\cos H}$	$\varrho_p=\frac{r}{\sin H}$	$\frac{1}{2}ds$
ε	$-\frac{1}{12}ds^2\frac{1}{r_p}=\frac{1}{2}ds^2\frac{\cos H}{r}$	$\frac{1}{2}ds^2\frac{1}{\varrho_p}=\frac{1}{2}ds^2\frac{\sin H}{r}$	ds

*) In der Tabelle (II.) ist die stillschweigende Voraussetzung — die in den drei folgenden Tabellen von selbst erfüllt ist —, daß die angegebenen Werte der δ, e, ε von Null verschieden sind.

Tabelle)* (B.) *der Abstände* δ, e, ε *für eine Haupttangentenkurve*

$\left(\sin\tau \equiv \cos H = 0\text{: } p = +b,\ b_p = \pm t,\ h_p = \mp h,\ \cos\tau = \pm 1,\ r_p = \pm\varrho,\ \varrho_p = r,\ \omega_p \pm \omega = \frac{\pi}{2},\ \varrho \gtrless 0\right)$.

	$p = +b$	$b_b = \pm t\,(\varrho \gtrless 0)$	$h_b = \mp h\,(\varrho \gtrless 0)$
δ	$\pm ds\,(\varrho \gtrless 0)$	$-\frac{1}{12} ds^3 \frac{1}{r\varrho}$	$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = \sin\omega$
e	$\frac{1}{12} ds^2 \frac{\varrho'}{r}$; im Sonderfalle konstanter Torsion $\frac{1}{\varrho}$: $\frac{1}{12} ds^3 \frac{1}{r\lvert\varrho\rvert}$	$\frac{1}{2} ds$	$-\frac{\mathfrak{r}^2}{r} = -\mathfrak{r}\cos\omega$ $= -r\cos^2\omega = -\frac{1}{2}\varrho\sin 2\omega$
ε	$\frac{1}{6} ds^3 \frac{1}{r\varrho}$	ds	$\frac{1}{2} ds^2 \frac{1}{r}$

Tabelle (Γ.) *der Abstände* δ, e, ε *für eine geodätische Linie*

$\left(\sin H = 0;\ p = +h,\ \cos\tau = \pm 1,\ \varrho \gtrless 0,\ \omega = \tau + \frac{\pi}{2},\ \cos H = 1,\ \mathfrak{r}_p = \mathfrak{r},\ \varrho_p = \frac{1}{\omega'}\right)$.

	$p = +h$	b_h	h_h
δ	$ds\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = ds\sin\omega$	Wie in Tabelle (II.) für δ_{b_p}, mit $u = \sin\omega$, $v = \frac{1}{\omega'}\cos\omega$, nebst den weiteren obigen Beziehungen für eine geodätische Linie.	$ds\frac{\mathfrak{r}\sin\omega}{+\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{r}^2} + \omega'^2}}$
e	$\frac{\mathfrak{r}^2}{r} = \mathfrak{r}\cos\omega = r\cos^2\omega$ $= \frac{1}{2}\varrho\sin 2\omega$	$\frac{1}{\omega'}\cos\omega$	$\frac{-\omega'\sin\omega}{\frac{1}{\mathfrak{r}^2} + \omega'^2}$
ε	$\frac{1}{2} ds^2 \frac{1}{r}$	$ds\sin\omega$	$-ds\cos\omega$

*) Diese Tabelle deckt sich im wesentlichen mit der unter (1.) angegebenen, und ist hier nur der leichteren Übersicht halber nochmals aufgenommen.

Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln*).

Von Frl. *Emmy Noether* in Erlangen.

Einleitung.

In der projektiven Invariantentheorie der Formen von n Variabeln sind die an das Hauptproblem — den Endlichkeitsnachweis des Formensystems — sich anschließenden Fragen kaum behandelt, wenn man über das binäre und ternäre Gebiet hinausgeht. Es sind dies die Fragen nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Formen und nach den Methoden zur Beherrschung dieses Formenzusammenhangs. Diese Methoden beruhen wesentlich — wie dies im binären und ternären Gebiet vollständig nachgewiesen ist — auf zwei von Herrn *Study* als „Fundamentalsätze der symbolischen Methode" bezeichneten Sätzen, nämlich dem Satz von der symbolischen Darstellbarkeit der Formen und dem Satz von den symbolischen Identitäten**). Der letztere Satz sagt aus, daß man alle zwischen ganzen invarianten Bildungen bestehenden Relationen erhält durch sukzessive Anwendung einer kleinen Anzahl von symbolischen Identitäten; daß also die symbolische Methode, und nur diese, die Kenntnis des Formenzusammenhangs gibt, ohne aus dem Gebiet des Invarianten herauszutreten.

*) Vgl. eine kurze Mitteilung an die Salzburger Naturforscherversammlung. Jahresbericht d. deutsch. Math.-Vereinigung. Bd. 19, S. 101.

**) *E. Study*, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig, Teubner, 1889). II. § 6. — Über das Auftreten dieser Fundamentalsätze auch in der Invariantentheorie spezieller Transformationsgruppen vgl. *Study*, Das Apollonische Problem (Math. Ann. Bd. 49 [1897]) und Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven (Transactions of the American Math. Society, Bd. 1 [1909]).

Auf den Grund der Schwierigkeit beim Übergang zu n Variabeln hat schon Herr *Gordan* in seinem Erlanger Programm*) hingewiesen; er liegt darin, daß der erste Satz der symbolischen Methode in seiner allgemeinen Fassung nicht mehr gilt. Es treten im n-nären Gebiet bekanntlich Variabelnreihen höherer Stufe p_ϱ**) auf und analog Symbolreihen höherer Stufe S^ϱ; und zwar gelangt man zu diesen Reihen sowohl, wenn man, wie ursprünglich *Clebsch****), ausgeht von Formen mit beliebig vielen Reihen p_ϱ, als auch wenn man ausgeht von Formen, die nur beliebig viele kogrediente Reihen x enthalten, nach dem Vorgang von *F. Deruyts* und *A. Capelli*†). Eine symbolische Darstellung, die die Reihen p_ϱ, S^ϱ explizit††) enthielte, existiert nun nicht; es ist nötig, die p_ϱ, S^ϱ in die einzelnen Reihen x und die dazu kontragredienten s aufzulösen und diese in verschiedene Determinanten zu verteilen. Nun läßt sich allerdings mittels Differentialbedingungen (vgl. Formel (19.)) verifizieren, daß ein gegebenes Determinantenaggregat die Eigenschaft besitzt, nur von den Reihen p_ϱ, S^ϱ abzuhängen; ein Überblick aber über die Gesamtheit der invarianten Bildungen und über die Prozesse zu ihrer Erzeugung läßt sich auf diese Art nicht gewinnen†††).

Wir zeigen nun in §§ 2 und 6, wie man unter Anwendung des „Satzes von den korrespondierenden Matrizen“*†) den ersten Fundamentalsatz in seiner Allgemeinheit wieder erhält, indem man die Darstellung

*) *P. Gordan*, über das Formensystem binärer Formen. S. 46. (Leipzig, Teubner, 1875).

**) Für die Bezeichnung vgl. § 1.

***) *A. Clebsch*, über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. (Abh. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. XVII, 1872).

†) Vgl. *A. Capelli*, Lezioni sulla teoria delle forme algebriche (Napoli 1902), § 22—24, und die dort angeführte Literatur.

††) Genauere Definition der „expliziten Darstellung“ in § 2.

†††) Auch eine von Herrn *Study* herrührende rechnerisch sehr wertvolle Weiterbildung der Symbolik (mitgeteilt von *F. Engel*, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1900, S. 126, und für das quaternäre Gebiet von *E. Study*, Geometrie der Dynamen, S. 135) ist keine explizite Darstellung in unserm Sinne. Sie dürfte z. B. schwerlich zu den *unsymbolischen* Differentiationsprozessen zur Erzeugung der Formen führen.

*†) Abgesehen von *Graßmanns* Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 112 zuerst bei *A. Brill*, über zwei Berührungsprobleme, § 2 (Math. Ann. Bd. 4. 1871).

durch Determinanten ersetzt durch eine Darstellung durch „Matrizenprodukte“. In § 2 wird gezeigt, daß ein jedes die Reihen S^ϱ, p_ϱ explizit enthaltende Matrizenprodukt eine invariante Bildung der Grundform ist; die in § 6 gegebene Umkehrung, daß sich jede invariante Bildung explizit durch Matrizenprodukte darstellen läßt, gelingt erst durch Übertragung des zweiten Fundamentalsatzes (§§ 3—5).

Dieser Satz ist bekannt für Formen, die nur Variabelnreihen x enthalten*). Das allgemeine Problem, die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten aufzustellen, bei denen alle Reihen S^ϱ, p_ϱ als unzerlegbar betrachtet werden, ist von Herrn *Study* formuliert**); er sieht zugleich in der Anzahl der auftretenden Identitäten ein Maß für die Schwierigkeit der Methoden im n-nären Gebiet. Indem es nun gelingt, die Gesamtheit der Identitäten in eine einzige Formel (36.) zusammenzufassen, ist diese Schwierigkeit wenigstens auf ein Mindestmaß herabgedrückt. Bei der Anwendung werden allerdings häufig gewisse ausgezeichnete Spezialfälle von (36.) auftreten, wie (20.), (21.), die dadurch charakterisiert sind, daß sie die explizite Darstellung zulassen, ohne Substitution neuer Reihen; oder Formel (31.), die als „Zerlegungsidentität“ bezeichnet wird, da eine Reihe p_ϱ scheinbar in die Reihen y zerlegt auftritt.

Auf den beiden Fundamentalsätzen läßt sich nun leicht die weitere Theorie aufbauen. Der erste Satz gibt direkt die Prozesse zur Erzeugung der Formen, den symbolischen Faltungsprozeß und die unsymbolischen Differentiationsprozesse***), während die Zerlegungsidentität unter diesen Prozessen alle äquivalenten ausschaltet (§ 6). Die Kenntnis der Differentiationsprozesse ergibt weiter die Übertragung des Begriffes der „Normal-

*) *E. Pascal*, Giorn. di mat. 26 (1888), S. 33, 102; Rendic. d. Accad. d. Linc. (4) 4 (1888), S. 119; ib. Mem. (4) 5 (1888), S. 375.

**) „Methoden . . .“, S. 204, Anmerkung 17).

***) In der Arbeit „Invariante Gebilde von Nullsystemen“ (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 97, Abt. II a, 1888) ist Herr *Mertens* auf anderem, nicht direkt verallgemeinerungsfähigem Wege zum *quaternären* Faltungsprozeß gelangt. Die dort auftretende alternierende Invariante von 6 Reihen S^2 unterscheidet sich von der bei uns bei einmaliger Anwendung der Substitution (11.) entstehenden durch ein Aggregat gerader Invarianten. Für einen Spezialfall findet sich der quaternäre Faltungsprozeß auch bei Herrn *P. Gordan*, Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen (Math. Ann. Bd. 56. 1903).

form" auf das n-näre Gebiet, und mittels eines im quaternären Gebiet von Herrn *Mertens**) angegebenen Beweisverfahrens den Satz, daß sich ein System von invarianten Bildungen ersetzen läßt durch ein äquivalentes System von Normalformen (§ 7). Unter dieser letzteren Voraussetzung habe ich in meiner Dissertation**) gezeigt, daß sich der ternäre Faltungsprozeß erzeugen läßt durch sukzessive Anwendung von zwei Grundfaltungen. Auf Grund dieses Satzes und der Theorie der Reihenentwicklung habe ich dann unter Einführung des Begriffes der „Formenreihe" die hauptsächlichsten Reduktionssätze für Formensysteme entwickelt. Ganz analog läßt sich im n-nären Gebiet der Faltungsprozeß aus $n-1$ Grundfaltungen erzeugen (§ 8) und lassen sich die Reduktionssätze aufstellen (§ 9).

Nachbemerkung. Gelegentlich der Salzburger Mitteilung wurde ich durch Herrn Prof. *E. Müller*, Wien, darauf aufmerksam gemacht, daß das dieser Arbeit zugrundeliegende Rechnen mit Matrizenprodukten im Prinzip identisch ist mit dem Kalkül von *Graßmanns* Ausdehnungslehre***). In der Tat läßt sich *Graßmanns* „kombinatorisches Produkt" $[S^{\varrho_1} S^{\varrho_2} \dots S^{\varrho_i}]$ auffassen als eine durch diese Reihen gegebene Matrix (vgl. § 2), und zwar das „progressive Produkt" als die Matrix der Reihen selbst, das „regressive" als die Matrix der zugeordneten Reihen $S_{n-\varrho_1}, S_{n-\varrho_2}, \dots S_{n-\varrho_i}$, während die dem „gemischten Produkt" entsprechende Matrix entsteht, indem man mehrere Reihen S durch die Substitution (9.) zu neuen Reihen P, Q zusammenfaßt. Unsere „zugeordnete Reihe" entspricht dabei *Graßmanns* „Ergänzung", unser „Matrizenprodukt" einem „gemischten Produkt von der Stufenzahl 0".

Nach dieser Zuordnung wird die in der Ausdehnungslehre 1862, Nr. 113, gegebene Entwicklung identisch mit einer zu unserer Formel (32.) dualistischen Formel. Im Spezialfall $\varrho = 1$ geht (32.) in (17.), die dualistische Formel in (16.) über. Aus diesen Spezialfällen der *Graßmann*schen

---

*) *F. Mertens*, Über invariante Gebilde quaternärer Formen. (Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien. Bd. 98. Abt. II a. 1889.)

**) Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form. (Dieses Journal, Bd. 134. 1908.)

***) *Hermann Graßmanns* gesammelte mathematische und physikalische Werke. Ersten Bandes zweiter Teil: Die Ausdehnungslehre von 1862. In Gemeinschaft mit *H. Graßmann d. Jüngeren* herausgegeben v. *Fr. Engel* (Leipzig, Teubner 1896).

Entwicklung hat neuerdings Herr *Müller**) die oben erwähnten Identitäten (20.), (21.) abgeleitet.

Unsere Ableitung gibt im Unterschied von der *Graßmann-Müller*schen zugleich den Nachweis der *Vollständigkeit* der Identitäten, was für die hier in Betracht kommenden Fragen als das Wesentlichste erscheint, und sie geht von (20.), (21.) weiter zu den allgemeinsten unzerlegbaren Identitäten (36.), die bis jetzt noch nicht bemerkt zu sein scheinen.

§ 1. *Bezeichnungen und Definitionen. Zusammenfassung bekannter Resultate.*

Wir bezeichnen, wie üblich, als Variabelnreihe x die Reihe der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ und analog als Variabelnreihe p_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots n-1$) die Reihe der $\binom{n}{\varrho}$ Elemente $p_{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}$, wobei $p_{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}$ die aus der Matrix der ϱ Reihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\varrho)}$ gebildeten $\binom{n}{\varrho}$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_2}^{(1)} & \ldots & x_{i_\varrho}^{(1)} \\ x_{i_1}^{(2)} & x_{i_2}^{(2)} & \ldots & x_{i_\varrho}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ x_{i_1}^{(\varrho)} & x_{i_2}^{(\varrho)} & \ldots & x_{i_\varrho}^{(\varrho)} \end{vmatrix} \qquad (i_1 < i_2 \cdots < i_\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

bedeuten. Nach dem Satze über die korrespondierenden Matrizen**) ist einer jeden Reihe p_ϱ eine zweite $q_{n-\varrho}$ ein-eindeutig zugeordnet durch die für jedes Element der Reihe geltende Beziehung:

$$(1.) \qquad p_{i_1 i_2 \ldots i_\varrho} = (-1)^{\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} + i_1 + i_2 + \cdots + i_\varrho} q_{j_1 j_2 \ldots j_{n-\varrho}},$$

worin die i und j unter sich gut geordnet sind und zusammen eine volle Permutation der Zahlen 1 bis n ergeben. Die Reihe $q_{n-\varrho}$ besteht aus den $\binom{n}{\varrho}$ Determinanten $(n-\varrho)$-ten Grades $q_{j_1 j_2 \ldots j_{n-\varrho}}$, die gebildet sind aus der Matrix von $n-\varrho$ den x kontragredienten Reihen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots u^{(n-\varrho)}$. Diese Reihen erfüllen die $\varrho \cdot (n-\varrho)$ Bedingungsgleichungen:

$$(2.) \qquad (u^{(k)} | x^{(l)}) = \sum_{a=1}^{n} u_a^{(k)} x_a^{(l)} = 0; \qquad (k = 1, 2, \ldots n-\varrho;\ l = 1, 2, \ldots \varrho)$$

---

*) *E. Müller*, Beiträge zur *Graßmann*schen Ausdehnungslehre. 1. Mitteilung: Einige allgemeine Sätze. (Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. Wien; Bd. 118. Abt. II a. Juli 1909), Satz 16 und 18.

**) Vgl. etwa: *Gordan-Kerschensteiner*, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. I, S. 99.

wir wollen sie (mit *Clebsch**) so normiert annehmen, daß der in (1.) sonst eingehende Proportionalitätsfaktor gleich Eins gesetzt ist.

Die allgemeinsten Formen lassen sich nach *Clebsch***) (und ebenso nach den späteren Untersuchungen von *F. Deruyts* und *A. Capelli*, vgl. Einleitung) zurückführen auf solche, die von jeder der $n-1$ Reihen p_ϱ höchstens eine enthalten, die sich also symbolisch folgendermaßen darstellen lassen:

$$(3,) \qquad (S^1|p_1)^{m_1}(S^2|p_2)^{m_2}\cdots(S^{n-1}|p_{n-1})^{m_{n-1}},$$

wobei wir in Analogie mit (2.) gesetzt haben:

$$(S^\varrho|p_\varrho) = \Sigma S^{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}\, p_{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}.$$

Die Symbolreihen S^ϱ lassen sich infolge der zwischen den Elementen einer Reihe p_ϱ bestehenden nichtlinearen identischen Beziehungen so normieren, daß sie ebendenselben Identitäten genügen, daß sie sich also verhalten wie die Determinanten einer ϱ-reihigen Matrix, deren Reihen $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots s^{(\varrho)}$ zu den x kontragredient sind***). Es läßt sich also einer jeden Reihe S^ϱ eine andere $S_{n-\varrho}$ ein-eindeutig zuordnen durch die Beziehung:

$$(4.) \qquad S_{i_1 i_2 \ldots i_{n-\varrho}} = (-1)^{\frac{(n-\varrho)(n-\varrho+1)}{2} + i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-\varrho}}\, S^{j_1 j_2 \ldots j_\varrho},$$

wo wieder die i und j unter sich gut geordnet sind und zusammen die Zahlen 1 bis n gerade erschöpfen. Die Elemente $S_{i_1 i_2 \ldots i_{n-\varrho}}$ der Reihe $S_{n-\varrho}$ verhalten sich wie die aus $(n-\varrho)$— den x kogredienten — Reihen $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots \sigma^{(n-\varrho)}$ gebildeten Determinanten, und die Reihen s und σ sind durch die $\varrho\cdot(n-\varrho)$ Bedingungen verknüpft:

$$(5.) \qquad (s^{(k)}|\sigma^{(l)}) = 0. \qquad (k=1,2,\ldots\varrho;\ l=1,2,\ldots n-\varrho)$$

Infolge der Beziehungen (1.) und (4.) ist ein jeder Faktor von (3.) der äquivalenten vierfachen symbolischen Darstellung fähig:

$$(6.) \quad (S^\varrho|p_\varrho) = (S^\varrho\, q_{n-\varrho}) = (S_{n-\varrho} p_\varrho) = (-1)^{\varrho(n-\varrho)}(q_{n-\varrho}|S_{n-\varrho})^\dagger),$$

wobei, wie stets im folgenden, $(S^\varrho\, q_{n-\varrho})$ und $(S_{n-\varrho} p_\varrho)$ abkürzend für die Determinanten $(s^{(1)}\ldots s^{(\varrho)} u^{(1)}\ldots u^{(n-\varrho)})$ und $(\sigma^{(1)}\ldots\sigma^{(n-\varrho)} x^{(1)}\ldots x^{(\varrho)})$ gesetzt sind; durch *Laplace*sche Entwicklung erweisen sich diese als nur abhängig von den

---

*) a. a. O. § 5.

**) a. a. O. § 12.

***) *Clebsch*, a. a. O. § 4.

†) Vgl. *Clebsch*, a. a. O. § 5.

Reihen $S^\varrho, q_{n-\varrho}$ bzw. $S_{n-\varrho}, p_\varrho$, was die obige Schreibweise andeuten soll. Die Ausdrücke $(S^\varrho|p_\varrho)$ und $(q_{n-\varrho}|S_{n-\varrho})$ bedeuten nach den obigen Ausführungen die Produkte der Matrizen der Reihen s und x, bzw. der Reihen u und σ, wobei unter Matrizenprodukt die Summe über die Produkte entsprechender Determinanten, also der Wert der Determinante der Produktmatrix, verstanden ist.

Die einer Symbol- (bzw. Variabeln-) reihe zukommende charakteristische Zahl $\varrho\cdot(n-\varrho)$ bezeichnen wir nach *Clebsch* als *Gewicht* der Reihe*), die Zahl ϱ, die die Anzahl der Reihen s angibt, als *oberen Gewichtsindex*, die Zahl $n-\varrho$, die die Anzahl der Reihen σ angibt, als *unteren Gewichtsindex*. Aus den Beziehungen (4.) folgt, daß eine Symbolreihe in ein und derselben Relation einmal mit oberem, einmal mit unterem Gewichtsindex auftreten kann; dasselbe gilt für das Auftreten der zusammengehörigen Reihen p_ϱ und $q_{n-\varrho}$. Es sei noch bemerkt, daß wir allgemein bezeichnen:

Variabelnreihen höherer Stufe, deren zugehörige Matrix aus Reihen x besteht, durch p, solche, deren Matrix aus Reihen u besteht, durch q;

die den x kogredienten Symbolreihen durch kleine griechische Buchstaben: $\sigma, \tau, \alpha, \beta$;

die den u kogredienten Symbolreihen durch kleine lateinische Buchstaben: s, t, a, b;

alle übrigen Symbolreihen durch große lateinische Buchstaben mit Gewichtsindex: S^σ, T^τ, A^ϱ bzw. $S_{n-\sigma}$, $T_{n-\tau}$, $A_{n-\varrho}$.

Entsprechend oberem oder unterem Gewichtsindex schreiben wir auch die einzelnen Elemente einer Reihe mit oberen oder unteren Indizes, wie z. B. in (4.).

§ 2. *Darstellung durch Matrizenprodukte.*

Wir verstehen im folgenden stets unter „*Matrizenprodukt*“ die Summe über die Produkte entsprechender Determinanten zweier Matrizen von gleicher Reihenzahl, wo die Reihen der zweiten Matrix denjenigen der ersten kontragredient sind. Dabei können die Reihen jeder Matrix: 1. einzeln gegeben sein, 2. wie in (6.) zu einer Reihe S^ϱ zusammengefaßt, 3. zu verschiedenen Reihen $S^{\varrho_1}, S^{\varrho_2}\ldots$ vereinigt sein. Bezeichnet soll das Matrizenprodukt durch das in (6.) angewandte Symbol (|) werden. Die Dar-

*) a. a. O. § 11.

stellung (6.) ist eine spezielle Anwendung einer zweiten Fassung des Satzes über die korrespondierenden Matrizen: „*Einem jeden ϱ-reihigen Matrizenprodukt* $(v^{(1)}v^{(2)}\dots v^{(\varrho)}|y^{(1)}\dots y^{(\varrho)})$ *ist eine Determinante zugeordnet; und umgekehrt läßt sich jeder Determinante ein Matrizenprodukt von vorgegebener Reihenanzahl* ϱ $(\varrho = 1, 2, \dots n-1)$ *zuordnen*“*). In der Tat hat man nur die Reihen y zu einer Reihe p_ϱ zusammenzufassen (bzw. die Reihen v zu einer Reihe q_ϱ) und die durch (1.) gegebenen Substitutionen auszuführen, um bei gegebenem Matrizenprodukt zur Determinante zu gelangen und umgekehrt. Der Wert der Determinante ist dabei allerdings nicht durch ihre einzelnen Elemente gegeben, sondern ergibt sich erst durch *Laplace*sche Entwicklung. Da sich also Determinante und Matrizenprodukt als äquivalent erweisen, drückt sich der Satz von der symbolischen Darstellbarkeit der Formen (erster Fundamentalsatz) auch so aus:

Satz I: „*Alle invarianten Bildungen lassen sich symbolisch durch Matrizenprodukte darstellen, und umgekehrt sind alle Matrizenprodukte invariante Bildungen*“**).

Die Darstellung durch Matrizenprodukte erlaubt, die durch die Determinantendarstellung bedingte wesentliche Schwierigkeit der nicht expliziten Darstellung zu überwinden***). *Wir verstehen dabei unter „expliziter Darstellung“ eine solche, in die nur die Reihen $S^\sigma, T^\tau, \dots$ selbst eingehen, oder eindeutig aus diesen ableitbare Reihen R^ϱ, in der aber die einzelnen Teilreihen $s, t, \dots$ nicht mehr auftreten.* Wir werden in § 6 für alle invarianten Bildungen, die nur von den Symbolreihen $S^\sigma, T^\tau, \dots$ abhängen, eine in diesen Symbolreihen explizite Darstellung erhalten, und damit die Übertragung der erzeugenden Prozesse, Faltungsprozeß und Differentiationsprozesse, auf das n-näre Gebiet. Die Möglichkeit der expliziten Darstellung erhellt daraus, daß nur die einfachsten Matrizenprodukte gerade den bei der Determinantendarstellung auftretenden Determinanten zugeordnet werden können, daß also alle übrigen Matrizenprodukte Zusammenfassungen verschiedener Determinanten zu einem einzigen Ausdruck

*) Für $\varrho > n$ verschwindet bekanntlich das Matrizenprodukt; für $\varrho = n$ geht es in das Produkt zweier Determinanten über.

**) Invariante Bildungen *vorgegebener* Grundformen sind natürlich nur solche Aggregate von Matrizenprodukten, die von den Symbolreihen $S^\varrho \dots$ abhängen.

***) Vgl. die Einleitung.

sind. Denn löst man die Symbol- und Variabelnreihen in die einzelnen Reihen s, u, x auf, so muß nach dem ersten Fundamentalsatz in seiner gewöhnlichen Form notwendig ein Aggregat von Determinanten entstehen. Der Beweis dafür, daß umgekehrt alle Determinantenaggregate, die invariante Bildungen vorgegebener Grundformen darstellen, sich zu expliziten Matrizenprodukten zusammenfassen lassen, ergibt sich unter Benutzung des zweiten Fundamentalsatzes (§ 6).

Um nun aus zwei Symbolreihen S^σ, T^τ unter Zuhilfenahme von Variabelnreihen eine alle Reihen explizit enthaltende invariante Bildung der Grundform $(S^\sigma | p_\sigma)(T^\tau | p_\tau)$ zu erhalten (*Faltungsprozeß*), haben wir nur ein Matrizenprodukt dritter Art nach der am Anfang des Paragraphen gegebenen Definition zu bilden:

$$(7.) \qquad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}). \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \tau, n-\sigma)^*)$$

Entwickelt gibt (7.):

$$(v^{(1)} \ldots v^{(n-\sigma-\lambda)} s^{(1)} \ldots s^{(\sigma)} | \alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(n-\tau)} y^{(1)} \ldots y^{(\tau-\lambda)})$$

$$(8.) \qquad = \sum \begin{vmatrix} v_{i_1}^{(1)} & \ldots v_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{i_1}^{(n-\sigma-\lambda)} & \ldots v_{i_{n-\lambda}}^{(n-\sigma-\lambda)} \\ s_{i_1}^{(1)} & \ldots s_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ s_{i_1}^{(\sigma)} & \ldots s_{i_{n-\lambda}}^{(\sigma)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{i_1}^{(1)} & \ldots \alpha_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{i_1}^{(n-\tau)} & \ldots \alpha_{i_{n-\lambda}}^{(n-\tau)} \\ y_{i_1}^{(1)} & \ldots y_{i_{n-\lambda}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ y_{i_1}^{(\tau-\lambda)} & \ldots y_{i_{n-\lambda}}^{(\tau-\lambda)} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,k,l} \varepsilon \, q_{k_1 k_2 \ldots k_{n-\sigma-\lambda}} S^{k_{n-\sigma-\lambda+1} \ldots k_{n-\lambda}} T_{l_1 \ldots l_{n-\tau}} p_{l_{n-\tau+1} \ldots l_{n-\lambda}},$$

d. h. einen nur von den Reihen S, T, q, p abhängigen Ausdruck. Es ist dabei $\varepsilon = \pm 1$**) und die Summe so zu verstehen, daß die Indizes einer jeden Reihe $S\ldots$ unter sich gut geordnet sind, und für jede Kombination $i_1 i_2 \ldots i_{n-\lambda}$ die k sowohl wie die l einzeln alle dann noch möglichen Permutationen der Zahlen i durchlaufen.

Die in (7.) eingehende Zahl λ bezeichnen wir als *Defekt der Faltung* im Falle $\sigma \geqq \tau$; der Grund dieser letzteren Einschränkung ergibt sich in § 6.

Die Determinanten der beiden in (7.) eingehenden Matrizen lassen sich als Elemente neuer Reihen $Q^{n-\lambda}, P_{n-\lambda}$ betrachten, deren zugeordnete

*) Die Zahl λ läuft stets bis zu der kleineren der beiden zuletzt angegebenen Zahlen.

**) Diese Bezeichnung soll durchweg beibehalten werden.

Q_λ, P^λ seien. Diese Reihen Q, P lassen sich nach (8.) durch die ursprünglichen S und q, bzw. T und p ausdrücken. Wir deuten dies an durch die Gleichungen:

$$(9.) \qquad \begin{aligned} q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma &= Q^{n-\lambda} \rightharpoonup Q_\lambda, \text{ oder auch } Q_\lambda = [q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma]_\lambda, \\ T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda} &= P_{n-\lambda} \rightharpoonup P^\lambda, \text{ oder auch } P^\lambda = [T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}]^\lambda. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (4.) gilt dann, analog (6.), für das Matrizenprodukt (7.) die äquivalente vierfache symbolische Darstellung:

$$(10.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma \,|\, T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma P^\lambda) = (Q_\lambda T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (-1)^{\lambda(n-\lambda)} (P^\lambda \,|\, Q_\lambda).$$

Eine weitere Substitution neuer Reihen läßt sich an (7.) vornehmen, indem man setzt:

$$(11.) \qquad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma \,|\, T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) = (R^{\sigma+\lambda} \,|\, p_{\sigma+\lambda})(R^{\tau-\lambda} p_{\tau-\lambda}).$$

Auch hier zeigt (8.), daß die Produkte der Elemente der Reihen R sich eindeutig durch die Reihen S und T ausdrücken lassen. Die Substitutionen (9.) und (11.) werden insbesondere dann anzuwenden sein, wenn mit (7.) eine weitere Faltung mit anderen Reihen vorgenommen wird.

Die Matrizendarstellung setzt uns instand, die quadratischen Relationen zwischen den Elementen einer Reihe p_ϱ (aus denen bekanntlich alle übrigen folgen), also nach § 1 die in den Koeffizienten der Grundform linearen Beziehungen, denen die Reihen S^ϱ genügen, invariant aufzustellen. Es sind die Identitäten:

$$(12.) \qquad (q_{n-\varrho-\lambda} S^\varrho \,|\, S_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda}) = 0 \text{*}), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho, n-\varrho)$$

wo die p und q als willkürliche Größen zu betrachten sind.

Wir werden in § 5 sehen, daß die Identitäten mit ungerader Defektzahl λ eine Folge derjenigen von höherem Defekt sind. Die Beziehungen (12.) sind eine direkte Folge der Relationen (5.); denn man hat:

$$(q_{n-\varrho-\lambda} S^\varrho \,|\, S_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda}) = (v^{(1)} \ldots v^{(n-\varrho-\lambda)} s^{(1)} \ldots s^{(\varrho)} \,|\, \sigma^{(1)} \ldots \sigma^{(n-\varrho)} y^{(1)} \ldots y^{(\varrho-\lambda)}),$$

und die Anwendung des Produktsatzes gibt infolge von (5.) eine verschwindende $(n-\lambda)$-reihige Determinante. Die Identitäten (12.) sagen aus, daß es zur Aufsuchung aller Typen von Faltungen genügt, das Produkt von in jeder Variabelnreihe linearen Formen zu falten; oder auch, nach § 6, daß die normierte Form $(S^\varrho \,|\, p_\varrho)^m$ keine in den Koeffizienten lineare invariante Bildung besitzt.

---

*) Vgl. einen Nachtrag von *Study* in *Graßmanns* Werken, ersten Bandes zweiter Teil, S. 510 (Bedingung, daß eine Größe S^ϱ einfach ist).

Die Bedingungen (12.) sind auch *hinreichend* zur Charakterisierung der Reihen p_ϱ. Da nämlich die Eigenschaft, daß die einzelnen Elemente von p_ϱ Determinanten einer Matrix sind, eine invariante ist, muß sie sich auch invariant ausdrücken lassen; die Bedingungen (12.) stellen aber nach Satz VI die größtmögliche invariante Einschränkung für die p_ϱ dar, nämlich die, daß die aus der Reihe p_ϱ als Koeffizienten gebildete Linearform überhaupt keine invarianten Bildungen besitzt.

§ 3. *Die symbolischen Identitäten**).

Wir haben nun den zweiten Fundamentalsatz der symbolischen Methode zu übertragen, nämlich die Gesamtheit der irreduziblen unzerlegbaren Identitäten aufzustellen, bei denen alle Reihen S^ϱ, p_ϱ als unzerlegbar angesehen werden. Wir setzen dabei noch folgendes fest: Entsprechend der Bedeutung von Symbol- und Variabelnreihen sollen solche Identitäten als zusammengesetzt betrachtet werden, die entstehen, wenn man die Variabelnreihe p_ϱ zu $p_{\varrho-1}y$ spezialisiert und auf die entstehenden Ausdrücke eine der Identitäten des Systems anwendet; während andrerseits Identitäten, die k Symbolreihen enthalten, als unzerlegbar gelten sollen, auch wenn sie durch den obigen Prozeß aus Identitäten mit weniger Symbolreihen hervorgehen. Die Reihen S^ϱ, p_ϱ brauchen nicht notwendig explizit in die Identitäten einzugehen; zu ihrer Auffassung als unzerlegbare Größen genügt der Nachweis, daß die auftretenden Matrizenprodukte nur von diesen Reihen abhängen. Wir werden aber zeigen, daß in diesem Falle, teilweise unter Anwendung der Substitution (11.), sich stets eine explizite Darstellung erzielen läßt. Die allgemeinen Identitäten erhalten wir mittels des Prinzipes der Matrizendarstellung aus den von Herrn *Pascal* gegebenen speziellen, die nur Reihen x und u enthalten und eine direkte Übertragung der von Herrn *Study* für das ternäre Gebiet gegebenen darstellen:

$$(13.)\quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (a^{(i)}|x)(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(n)}u) = (-1)^{n+1}(u|x)(a^{(1)}\dots a^{(n)}),$$

$$(14.)\quad \Sigma \pm (a^{(1)}|x^{(1)})(a^{(2)}|x^{(2)})\cdots(a^{(n)}|x^{(n)}) = (a^{(1)}\dots a^{(n)})(x^{(1)}\dots x^{(n)}),$$

$$(15.)\quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (u|\alpha^{(i)})(\alpha^{(1)}\dots \alpha^{(i-1)}\alpha^{(i+1)}\dots \alpha^{n}x) = (-1)^{n+1}(u|x)(\alpha^{(1)}\dots\alpha^{(n)}).$$

*) Für Formulierung und Literatur der Aufgabe vgl. die Einleitung.

Zwei weitere Identitäten gehen aus (13.) und (15.) durch die Substitutionen $(a^{(i)}|x)=(a^{(i)}q_{n-1})$, bzw. $(u|\alpha^{(i)})=(p_{n-1}\alpha^{(i)})$ hervor, sind also nach unserer Auffassung nicht als wesentlich verschieden zu betrachten. (14.) stellt den Produktsatz für Determinanten dar; wir wollen zeigen, wie man (13.) und (14.) (und dualistisch (15.) und (14.)) ersetzen kann durch das System der in geeigneter Weise gebildeten Produktsätze für Matrizen. Der Produktsatz, einmal für ϱ-reihige, einmal für $(\varrho-1)$-reihige Matrizen gebildet, lautet:

$$(a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(\varrho)}|xp_{\varrho-1})=(a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(\varrho)}|xy^{(2)}\dots y^{(\varrho)})=\Sigma\pm(a^{(1)}|x)(a^{(2)}|y^{(2)})\cdots(a^{(\varrho)}|y^{(\varrho)}),$$

$$\Sigma\pm(a^{(2)}|y^{(2)})\cdots(a^{(\varrho)}|y^{(\varrho)})=(a^{(2)}\dots a^{(\varrho)}|y^{(2)}\dots y^{(\varrho)})=(a^{(2)}\dots a^{(\varrho)}|p_{\varrho-1})=(a^{(2)}\cdots a^{(\varrho)}q_{n-\varrho-1});$$

und daraus folgt das System von Produktsätzen, wo $\varrho=2,3,\dots n$:

$$\begin{aligned}(16.)\qquad (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(\varrho)}|xp_{\varrho-1}) &= \sum_{i=1}^{\varrho}(-1)^{i+1}(a^{(i)}|x)(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(\varrho)}|p_{\varrho-1})\\ &= \sum_{i=1}^{\varrho}(-1)^{i+1}(a^{(i)}|x)(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(\varrho)}q_{n-\varrho+1})^{*}).\end{aligned}$$

Für $\varrho=n$ geht (16.) in (13.) über; spezialisieren wir weiter: $p_{n-1}=y^{(2)}p_{n-2}$, $p_{n-2}=y^{(3)}p_{n-3}$ usf., und wenden die Identitäten (16.) auf die Ausdrücke $(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(n)}|y^{(2)}p_{n-2})$, $(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\dots a^{(k-1)}a^{(k+1)}\dots a^{(n)}|y^{(3)}p_{n-3})$ usf. an, so gelangen wir von (13.) zu (14.). Die Identität (14.) ist also nach unserer Definition aus den Identitäten (16.) zusammengesetzt; oder das System (16.) ist den Identitäten (13.) und (14.) äquivalent. Das System (16.) erfüllt eine der für die allgemeinen Identitäten geforderten Bedingungen; es enthält die Reihe $p_{\varrho-1}$ als unzerlegbare Größe und zugleich in expliziter Form. Es ist das einzige System, das diese und nur diese Forderung erfüllt. Denn wir können aus den Reihen a,x,p keine weiteren Determinanten oder Matrizenprodukte bilden; zwischen diesen können aber keine von (16.) unabhängigen Relationen bestehen, da sonst durch Elimination von $(a^{(1)}\dots a^{(\varrho)}|xp_{\varrho-1})$ eine Relation zwischen $\varrho(\varrho\leqq n)$ Ausdrücken $(a^{(i)}|x)(a^{(1)}\dots a^{(i-1)}a^{(i+1)}a^{(\varrho)}q_{n-\varrho+1})$ entstände, nach (13.) aber mindestens $n+1$ solcher Ausdrücke in eine Relation eingehen müssen. Aus analogen Betrachtungen ergibt sich das (15.) und (14.) äquivalente System:

---

*) Die Identitäten (16.) lassen sich auch auffassen als die aus dem Gebiet von ϱ Variabeln übernommenen Identitäten (13.).

$$(17.)\quad \begin{aligned}(u\,q_{\varrho-1}|\,\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(\varrho)}) &= \sum_{i=1}^{\varrho}(-1)^{i+1}(u|\,\alpha^{(i)})(q_{\varrho-1}|\,\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(i-1)}\alpha^{(i+1)}\ldots\alpha^{(\varrho)})\\ &= \sum_{i=1}^{\varrho}(-1)^{i+1}(u|\,\alpha^{(i)})(p_{n-\varrho+1}\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(i-1)}\alpha^{(i+1)}\ldots\alpha^{(\varrho)}).\end{aligned}$$

Um von (16.) zu Identitäten zwischen beliebigen Reihen $A^{\varrho_1}, B^{\varrho_2}, \ldots x, p$ zu gelangen, bedenken wir, daß diese Identitäten mit (16.) identisch werden müssen, sobald wir auflösen: $A^{\varrho_1} = a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(\varrho_1)}$, $B^{\varrho_2} = b^{(1)}b^{(2)}\ldots b^{(\varrho_2)}$ usf., und daß sie sich auch nur durch die durch (16.) bestimmten Operationen zu Schlußausdrücken zusammenfassen lassen, sobald die einzelnen Ausdrücke vom Typus der in (16.) eingehenden sind. Wir erhalten so, wenn wir noch

$$(18.)\qquad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \varrho_k \leqq n$$

setzen:

$$\begin{aligned}&(a^{(1)}\ldots a^{(\varrho_1)}b^{(1)}\ldots b^{(\varrho_2)}\ldots k^{(1)}\ldots k^{(\varrho_k)}|\,x\,p_{\varrho-1}) = (A^{\varrho_1}B^{\varrho_2}\ldots K^{\varrho_k}|\,x p_{\varrho-1})\\ &= \sum_{i=1}^{\varrho_1}(-1)^{i+1}(a^{(i)}|\,x)(a^{(1)}\ldots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\ldots a^{(\varrho_1)}B^{\varrho_2}\ldots K^{\varrho_k}q_{n-\varrho+1})\\ &+(-1)^{\varrho_1\varrho_2}\sum_{i=1}^{\varrho_2}(-1)^{i+1}(b^{(i)}|\,x)(b^{(1)}\ldots b^{(i-1)}b^{(i+1)}b^{(\varrho_2)}A^{\varrho_1}\ldots K^{\varrho_k}q_{n-\varrho+1})\\ &\vdots\\ &+(-1)^{(\varrho_1+\cdots\varrho_{k-1})\varrho_k}\sum_{i=1}^{\varrho_k}(-1)^{i+1}(k^{(i)}|x)(k^{(1)}\ldots k^{(i-1)}k^{(i+1)}\ldots\\ &\qquad k^{(\varrho_k)}A^{\varrho_1}\ldots(K-1)^{\varrho_k-1}q_{n-\varrho+1}).\end{aligned}$$

Jede einzelne Summe (aber nicht schon ein Teil der Summe) enthält nun in der Tat die Reihen $A^{\varrho_1}, B^{\varrho_2}\ldots$ als unzerlegbare Größe; denn sie erfüllt die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen*):

$$(19.)\qquad \left(a^{(i+1)}\left|\frac{\partial}{\partial a^{(i)}}\right.\right)=0\,;\ \ldots\left(k^{(j+1)}\left|\frac{\partial}{\partial k^{(j)}}\right.\right)=0. \qquad (i=1,2,\ldots\varrho_1-1;\ j=1,2,\ldots\varrho_k-1)$$

Wir zeigen, daß sie alle Reihen auch explizit enthält. Denn setzen wir $B^{\varrho_2}\ldots K^{\varrho_k}q_{n-\varrho+1} = q_{n-\varrho_1+1}$, so kommt nach (16.) und (10.):

$$\begin{aligned}&\Sigma(-1)^{i+1}(a^{(i)}|\,x)(a^{(1)}\ldots a^{(i-1)}a^{(i+1)}\ldots a^{(\varrho_1)}q_{n-\varrho_1+1}) = (A^{\varrho_1}|\,x p_{\varrho_1-1})\\ &= (A_{n-\varrho_1}x p_{\varrho_1-1}) = (-1)^{(\varrho_1+1)(n+1)}(q_{n-\varrho_1+1}|\,A_{n-\varrho_1}x)\\ &= (-1)^{(\varrho_1+1)(n+1)}(B^{\varrho_2}\ldots K^{\varrho_k}q_{n-\varrho+1}|\,A_{n-\varrho_1}x).\end{aligned}$$

---

*) *Capelli*, a. a. O. § 23, gibt hinreichende Bedingungen:

$$\left(a^{(k)}\left|\frac{\partial}{\partial a^{(i)}}\right.\right)=0. \qquad (k>i,\ i=1,2,\ldots\varrho_1-1)$$

Daraus folgen am einfachsten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen durch Anwendung des *Poisson*schen Klammerprozesses nach *Wellstein*, Von den Differentialgleichungen der projektiven Invarianten, Math. Ann. 67 (1909) § 3.

Berechnen wir analog die übrigen Summen und setzen nachträglich, da die Reihen durch die Gewichtsindizes schon als verschieden charakterisiert sind, $B^{\varrho_2} = A^{\varrho_2}$, $C^{\varrho_3} = A^{\varrho_3}, \dots$, so erhalten wir die gewünschten Identitäten:

$$(20.) \qquad (A^{\varrho_1} A^{\varrho_2} \dots A^{\varrho_k} | x p_{\varrho-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\delta_i} (A^{\varrho_1} \dots A^{\varrho_{i-1}} A^{\varrho_{i+1}} \dots A^{\varrho_k} q_{n-\varrho+1} | A_{n-\varrho_i} x),$$
$$\delta_i = (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{i-1})\varrho_i + (\varrho_i + 1)(n+1),$$

und aus (17.) die dualistischen:

$$(21.) \qquad (u\, q_{\sigma-1} | A_{\sigma_1} A_{\sigma_2} \dots A_{\sigma_k})$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_i} (u A^{n-\sigma_i} | p_{n-\sigma+1} A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_{i-1}} A_{\sigma_{i+1}} \dots A_{\sigma_k}),$$
$$\varepsilon_i = (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{i-1})\sigma_i + (\sigma_i + 1)(n + \sigma).$$

Satz II. Mit (20.) *und* (21.) *ist die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten zwischen den Reihen* A^{ϱ_i}, x, p, *bzw.* A_{σ_i}, u, q *erschöpft, und zugleich die Gesamtheit derjenigen unzerlegbaren Identitäten, die explizite Darstellung ohne Vornahme der Substitution* (11.) *zulassen.*

Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus den Betrachtungen zur Ableitung von (20.) und (21.); der zweite Teil aus der Unmöglichkeit einer Identität zwischen zwei Symbolreihen: $(q_\varrho A^\sigma | B_{\varrho+\sigma-\tau} p_\tau) = \varepsilon_1 (q_\varrho B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_\tau) + \varepsilon_2 (q_\varrho q_{n-\tau} | B_{\varrho+\sigma-\tau} A_{n-\sigma})$, wo $\varrho \leqq \tau \leqq \sigma$ und keine der Reihen vom Gewicht $1 \cdot (n-1)$ ist. (Andere Annahmen über ϱ, τ, σ lassen sich durch Vertauschen der Reihenbezeichnungen auf diese zurückführen.) Diese Unmöglichkeit folgt z. B. durch Entwicklung (8.) bei der Spezialisierung $q_\varrho = l M^{\varrho-1}$, $q_{n-\tau} = l N^{n-\tau-1}$, wenn man $l_1 = 1$; $M^{2,3,\dots\varrho} = 1$; $A^{\varrho+1,\dots\varrho+\sigma} = 1$, alle anderen Elemente der Reihen l, M, A gleich Null setzt, während N und B beliebig sind. Da nun Identitäten zwischen beliebigen Reihen durch Auflösen einer Reihe p_τ in $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)}$ in solche übergehen, die aus (20.) zusammengesetzt sind, ist der zweite Teil der Behauptung fertig bewiesen, sobald sich (20.) aus Identitäten mit nur zwei Symbolreihen erzeugen läßt. Man erhält in der Tat aus

$$(20^a.) \quad (A^{\varrho_1} A^{\varrho_2} | x p_{\varrho-1}) = \varepsilon (A^{\varrho_1} q_{n-\varrho+1} | A_{n-\varrho_2} x) + (A^{\varrho_1} | x p_{\varrho_1-1}),$$
$$\text{wo } p_{\varrho_1-1} \backsim A^{\varrho_2} q_{n-\varrho+1},$$

durch die Spezialisierung $A^{\varrho_1} = B^{\sigma_1} B^{\sigma_2}$, d. h. durch

$$(B^{\sigma_1} B^{\sigma_2} | x p_{\varrho_1-1}) = \varepsilon (B^{\sigma_1} q_{n-\varrho_1+1} | B_{n-\sigma_2} x) + (B^{\sigma_1} | x p_{\sigma_1-1}), \text{ wo } p_{\sigma_1-1} \backsim B^{\sigma_2} q_{n-\varrho_1+1},$$

eine Identität (20.) in drei Symbolreihen; und durch weitere Spezialisierungen von $B^{\sigma_1} = C^{\tau_1} C^{\tau_2}$ usf. die allgemeinen Identitäten (20.). Die Nicht-

existenz der expliziten Darstellung einer Identität zwischen zwei Symbolreihen und zwei beliebigen Variabelnreihen läßt somit auf die Nichtexistenz bei beliebig viel Symbolreihen schließen, wenn unter den Variabelnreihen keine Reihe x oder u enthalten ist.

§ 4. *Die Zerlegungsidentitäten.*

Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall der Identitäten zwischen beliebigen Symbol- und Variabelnreihen, in deren Schlußausdrücken ohne Vornahme der Substitution (11.) eine Reihe p_τ in ihre einzelnen Reihen $y^{(1)} \dots y^{(\tau)}$ zerlegt auftritt, und bezeichnen diese Identitäten als „Zerlegungsidentitäten." Im Anschluß an die Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen bestimmen wir sie vorerst für den Fall nur zweier Symbolreihen, entwickeln also den Ausdruck $(q_\varrho A^\sigma | B_{\varrho+\sigma-\tau} p_\tau)$. Wir setzen dabei:

$$(22.)\quad q_{\varrho-a}^{(i_1 \dots i_a)} = p_{n-\varrho} y^{(i_1)} \dots y^{(i_a)}; \quad p_{\tau-a}^{(i_1 \dots i_a)} = y^{(i_{a+1})} \dots y^{(i_\tau)}; \quad p_\tau = y^{(1)} \dots y^{(\tau)}.$$

Inbezug auf die Zahlen ϱ, σ, τ sind vier Fälle zu unterscheiden:

1)	2)	3)	4)
$\varrho+\sigma \leqq n$	$\varrho+\sigma \leqq n$	$\varrho+\sigma \leqq n$	$\varrho+\sigma \leqq n$
$\tau \leqq \varrho$	$\tau \geqq \varrho$	$\tau \leqq \varrho$	$\tau \geqq \varrho$
$\tau \leqq \sigma$;	$\tau \leqq \sigma$;	$\tau \geqq \sigma$;	$\tau \geqq \sigma$,

von denen wir den ersten herausgreifen wollen, um danach die übrigen kurz zu charakterisieren. Nach (20.), (10.) und (9.) kommt, wenn wir die Reihe $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}$ in $y^{(1)}$ und $y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}$ zerlegen:

$$(23.)\quad (q_\varrho A^\sigma | y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}) = (q_{\varrho-1}^{(1)} A^\sigma | y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}) + (-1)^\varrho (q_\varrho [A_{n-\sigma} y^{(1)}]^{\sigma-1} | y^{(2)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}).$$

Das letzte Glied in (23.) hat nun genau die Form des ursprünglichen Ausdrucks — es ist nur σ durch $\sigma-1$, τ durch $\tau-1$ ersetzt — läßt also wieder die Gleichung (23.) zu. Wir können also, da $\tau \leqq \sigma$, die Operation (23.) τ-mal anwenden und gelangen unter Berücksichtigung von (10.) zu der Relation:

$$(24.)\quad \begin{aligned} (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) &= (-1)^{\varrho\sigma + (\sigma+\tau)(n+1)} (q_\varrho B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_\tau) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\tau} (-1)^{\varrho(i_1-1)} (q_{\varrho-1}^{(i_1)} [A_{n-\sigma} y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(i_1-1)}]^{\sigma-i_1+1} | y^{(i_1+1)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau}). \end{aligned}$$

Ein jedes Glied unter dem Summenzeichen ist nun wieder vom Typus des ursprünglichen Ausdrucks; es ist ϱ durch $\varrho-1$, σ durch $\sigma-i_1+1$, τ durch

$\tau - i_1$ ersetzt, die Bedingung 1) also noch stärker erfüllt. Wir können deshalb, da $\tau \leqq \varrho$, die Operation (24.) τ-mal anwenden und erhalten die gewünschte Zerlegungsidentität:

$$
\begin{aligned}
(q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) &= \varepsilon_{i_0}(q_\varrho B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_\tau) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{\tau} \varepsilon_{i_1}(q_{\varrho-1}^{(i_1)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-1}^{(i_1)}) \\
&+ \sum_{i_2=i_1+1}^{\tau} \varepsilon_{i_2}(q_{\varrho-2}^{(i_1 i_2)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-2}^{(i_1 i_2)}) \\
&\vdots \\
&+ \varepsilon_{i_\tau}(q_{\varrho-\tau}^{(i_1 i_2 \dots i_\tau)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^{\tau} \sum_{i_\alpha=i_{\alpha-1}+1}^{\tau} \varepsilon_{i_\alpha}(q_{\varrho-\alpha}^{(i_1 \dots i_\alpha)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma}^{\sim} p_{\tau-\alpha}^{(i_1 \dots i_\alpha)}).
\end{aligned}
\tag{25.}
$$

Für den Modul ε ergibt sich aus (24.):

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{i_\alpha} = (-1)^{\delta_{i_\alpha}}, \quad \delta_{i_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} (\varrho-\beta+1)(i_{\beta-1}+i_\beta+1) \\
&+ (\varrho-\alpha)(\sigma+i_\alpha+\alpha) + (\sigma+\tau+\alpha)(n+1),
\end{aligned}
\tag{26.}
$$

wo $i_0 = 0$ zu setzen ist. Das Summenzeichen in (25.) ist so zu verstehen, daß jeder Kombination $i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1}$, wo $i_1 < i_2 \cdots < i_{\alpha-1}$, alle Werte i_α, für die $i_{\alpha-1} < i_\alpha \leqq \tau$, zugefügt werden. Die einzelnen Summen in (25.) genügen, wie man sich unter Berücksichtigung von (26.) leicht überzeugt, den (19.) analogen Differentialgleichungen:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \middle| y^{(i+1)}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots \tau - 1)
\tag{27.}
$$

hängen also nur von der Reihe p_τ ab. Die Zerlegungsidentität ist also eine unzerlegbare Identität zwischen den Reihen A, B, q, p; auf die explizite Darstellung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

Im *Fall* 2) läßt sich die Operation (23.) ebenfalls τ-mal anwenden, die Operation (24.) aber bricht nach dem ϱ-ten Male ab. Es ist also im Schlußausdruck von (25.) das erste Summenzeichen zu ersetzen durch $\sum_{\alpha=0}^{\varrho}$. Im *Fall* 3) und 4) läßt sich die Operation (23.) nur σ-mal ausführen; an Stelle von (24.) tritt dann die Relation:

$$
\begin{aligned}
(q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) &= (-1)^{\varrho\sigma}(q_{\varrho-(\tau-\sigma)}^{(\sigma+1\dots\tau)} B^{n-\varrho+\tau-\sigma})(A_{n-\sigma} p_{\tau-(\tau-\sigma)}^{(\sigma+1\dots\tau)}) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{\sigma} (-1)^{\varrho(i_1-1)}(q_{\varrho-1}^{(i_1)}[A_{n-\sigma} y^{(1)} \dots y^{(i_1-1)}]^{\sigma-i_1+1} | y^{(i_1+1)} \dots y^{(\tau)} B_{\varrho+\sigma-\tau});
\end{aligned}
\tag{28.}
$$

die $(\tau-\sigma)$-malige Wiederholung von (28.), wobei das Summenzeichen

in $\sum_{i_\beta = i_{\beta-1}+1}^{\sigma+\beta-1}$ übergeht, — wie die $(\sigma - i_1 + 1)$-malige Anwendung von (23.) auf die Glieder unter dem Summenzeichen in (28.) zeigt —, gibt alle Glieder der dem Index $\alpha = \tau - \sigma$ entsprechenden Einzelsumme von (25.) mit entsprechendem Vorzeichen. Dann aber geht Fall 3) und 4) in Fall 1) und 2) über, denn die σ, τ entsprechenden Zahlen werden: $\sigma' = \sigma - i_{\tau-\sigma} + \tau - \sigma$, $\tau' = \tau - i_{\tau-\sigma} = \sigma'$; und bei Fortsetzung des Verfahrens wird $\tau' < \sigma'$. Es ist also im Schlußausdruck von (25.) das erste Summenzeichen zu ersetzen durch $\sum_{\alpha=\tau-\sigma}^{\tau,\varrho}$.

Analog ergibt sich aus (21.) die dualistische Zerlegungsidentität, bei der eine Reihe q_ϱ in die einzelnen Reihen $v^{(1)}, \ldots v^{(\varrho)}$ zerlegt wird. Setzen wir

(29.) $\dot{p}_{\tau-\beta}^{(i_1 \ldots i_\beta)} \backsim v^{(i_1)} \ldots v^{(i_\beta)} q_{n-\tau}$; $\quad \dot{q}_{\varrho-\beta}^{(i_1 \ldots i_\beta)} = v^{(i_\beta+1)} \ldots v^{(i_\varrho)}$; $\quad q_\varrho = v^{(1)} \ldots v^{(\varrho)}$,

so kommt:

$$(30.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) = \sum_{0,\tau-\sigma}^{\tau,\varrho\ \beta} \sum_{i_{\beta-1}+1}^{\varrho\ i_\beta} \varepsilon (\dot{q}_{\varrho-\beta}^{(i_1 \ldots i_\beta)} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} \dot{p}_{\tau-\beta}^{(i_1 \ldots i_\beta)}),$$

wo der Summationsindex β vom größeren der unteren Werte bis zum kleineren der oberen läuft. Alle Glieder einer Einzelsumme in (25.) und (30.) sind Polaren einer einzigen Form, entstanden durch die Polarprozesse $\left(\frac{\partial}{\partial p_{\tau-\alpha}} | p_{\tau-\alpha}^{(i_1 \ldots i_\alpha)}\right)$, $\left(q_{\varrho-\alpha}^{(i_1 \ldots i_\alpha)} | \frac{\partial}{\partial q_{\varrho-\alpha}}\right)$. Um dies zum Ausdruck zu bringen, bezeichnen wir mit Π ein Aggregat solcher Polaroperationen, multipliziert mit Konstanten, und erhalten dann an Stelle von (25.) und (30.) die Relation:

$$(31.) \quad (q_\varrho A^\sigma | p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) = \sum_{0,\tau-\sigma}^{\tau,\varrho\ \alpha} \Pi (q_{\varrho-\alpha} B^{n-\varrho-\sigma+\tau} | A_{n-\sigma} p_{\tau-\alpha}).$$

§ 5. *Die Zerlegungsidentitäten in expliziter Form.*

Spezialisieren wir in (25.) im Falle 4) τ zu $\sigma + \varrho$, so kommt:

$$(32.) \quad (q_\varrho A^\sigma | y^{(1)} \ldots y^{(\varrho+\sigma)}) = \sum_{i_\varrho = i_{\varrho-1}+1}^{\tau} \varepsilon_{i_\varrho} (q_\varrho | y^{(i_1)} \ldots y^{(i_\varrho)}) (A^\sigma | y^{(i_\varrho+1)} \ldots y^{(i_\varrho+\sigma)}),$$

wo $\varepsilon_{i_\varrho} = (-1)^{\delta_{i_\varrho}}$, $\delta_{i_\varrho} = \frac{\varrho(\varrho+1)}{2} + i_1 + \cdots + i_\varrho$ wird. Dies ist eine allgemeinere Form des Produktsatzes für Matrizen als (16.) und (17.) und ergibt sich durch *Laplace*sche Entwicklung der Determinante der Produktenmatrix: $\Sigma \pm (v^{(1)} | y^{(1)}) \cdots (v^{(\varrho)} | y^{(\varrho)}) (a^{(1)} | y^{(\varrho+1)}) \cdots (a^{(\sigma)} | y^{(\varrho+\sigma)})$. Der allgemeinere Produktsatz ist also aus den Identitäten (20.), bzw. (21.) zusammengesetzt, und das Herausgreifen der speziellen Form (16.), (17.) ist dadurch erklärt.

Die Relation (32.) gibt nun das Mittel zur expliziten Darstellung der Zerlegungsidentitäten. Wir betrachten dazu die in (31.) auftretenden Formen als Grundformen; d. h. wir führen die Substitution (11.) aus, die an der expliziten Darstellung in den Reihen A, B nichts ändert, da nach (8.) die neu eingeführten Reihen R sich durch die Reihen A, B selbst und nicht durch deren Teilreihen $a^{(1)}a^{(2)}\ldots$, $b^{(1)}b^{(2)}\ldots$ ausdrücken lassen. Sei also

$$(33.)\quad (q_{\varrho-\alpha}B^{n-\varrho-\sigma+\tau}|A_{n-\sigma}p_{\tau-\alpha}) = (R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho+\alpha})(R^{\tau-\alpha}|p_{\tau-\alpha}),$$

so kommt für die dem Index α entsprechende Einzelsumme von (25.):

$$(34.)\quad \begin{aligned} &\Sigma\varepsilon_{i_\alpha}(R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}y^{(i_1)}\ldots y^{(i_\alpha)})(R^{\tau-\alpha}|y^{(i_{\alpha+1})}\ldots y^{(i_\tau)}) \\ &= \Sigma\varepsilon_{i_\alpha}([R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}]^\alpha|y^{(i_1)}\ldots y^{(i_\alpha)})(R^{\tau-\alpha}|y^{(i_{\alpha+1})}\ldots y^{(i_\tau)}) \\ &= \varepsilon([R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}]^\alpha R^{\tau-\alpha}|p_\tau) = \varepsilon(R^{\tau-\alpha}q_{n-\tau}|R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}). \end{aligned}$$

Damit ist nun in der Tat ein expliziter Schlußausdruck gegeben, und die symmetrische Form, in der q_ϱ und p_τ eingehen, zeigt, daß (30.) zum gleichen Schlußausdruck führt, der also unabhängig ist von der ursprünglichen Zerlegung. Ein Unterschied zwischen (25.) und (30.) besteht nur, solange die Reihen y und v selbständige Bedeutung haben, die Zerlegungsidentität also nach unserer Definition in eine zerlegbare Identität übergeht. Um zu Identitäten mit mehr Symbolreihen zu gelangen, hat man nach § 3 (Schluß) nur eine Reihe q_ϱ in $q_{\varrho_1}C^{\sigma_1}$, bzw. p_τ in $p_{\tau_1}C_{\tau-\tau_1}$ aufzulösen. Die dann entstehenden Ausdrücke:

$$(35.)\quad (q_{\varrho_1}C^{\sigma_1}|[R^{\tau-\alpha}q_{n-\tau}]_\alpha R_{\varrho_1+\sigma_1-\alpha}),\quad ([R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}]^\alpha R^{\tau-\alpha}|p_{\tau_1}C_{\tau-\tau_1})$$

sind nun genau vom Typus der bei zwei Symbolreihen auftretenden, lassen also bei einer (33.) entsprechenden Substitution wieder explizite Darstellung zu, so daß sich durch Wiederholung explizite Darstellung bei beliebig vielen Reihen ergibt. Bemerkt mag noch werden, daß je die erste und letzte Summe in (25.) bzw. (30.) die explizite Darstellung ohne Anwendung von (33.) allein durch die Formel (32.) ergibt, oder sich überhaupt auf ein einziges, alle Reihen explizit enthaltendes Glied beschränkt. Die durch Auflösung von q_ϱ in $q_{\varrho_1}C^{\sigma_1}$ usf. aus (32.) entstehende Relation kann als der Produktsatz in seiner allgemeinsten Form aufgefaßt werden.

Zusammenfassend werden wir zeigen:

Satz III: Mit den Identitäten

$$(36.)\quad (q_\varrho A^\sigma|p_\tau B_{\varrho+\sigma-\tau}) = \sum_{0,\tau-\sigma}^{\tau,\varrho}{}^{\alpha}\ \varepsilon(R^{\tau-\alpha}q_{n-\tau}|R_{\varrho-\alpha}p_{n-\varrho}),$$

wo die Reihen R durch (33.) *bestimmt sind, und mit den durch Auflösung von* q_ϱ, p_τ *in* $q_{\varrho_1} C^{\sigma_1}$ *usf. daraus entstehenden ist die Gesamtheit der unzerlegbaren Identitäten erschöpft.*

In der Tat sind die entstehenden Identitäten die allgemeinsten ihrer Art, da die einzelnen Reihen in bezug auf Gewicht und Anzahl keiner Beschränkung mehr unterliegen, wie dies noch bei (20.), (21.) der Fall war. Es existieren aber auch keine weiteren Identitäten zwischen diesen Reihen; denn bei Auflösung einer Reihe p_τ in $y^{(1)} \ldots y^{(\tau)}$ sind die allgemeinsten Identitäten aus (20.), also nach § 3 (Schluß) aus (20ª.) zusammengesetzt; und zwar ist die im Anschluß an (16.) diskutierte Zusammensetzung genau die in § 4 durchgeführte. Den Übergang zu beliebig vielen Reihen liefert aber, wie die Diskussion von (20ª.) zeigt, die Anwendung immer derselben Operation auf die durch Auflösung von q_ϱ in $q_{\varrho_1} C^{\sigma_1}$ usf. entstehenden Ausdrücke. Es folgt daraus auch, daß der direkte Übergang von (20.) an Stelle von (20ª.) nichts Neues liefert; dies läßt sich rechnerisch leicht bestätigen, indem man einmal eine Reihe q_ϱ in (25.) spezialisiert, das andere Mal nach der Methode von § 4 den Übergang von (20.) macht; es entstehen beide Male die gleichen Summen, die durch Anwendung des allgemeinen Produktsatzes (siehe oben) in die aus (36.) sich ergebenden Identitäten übergehen. Die Identitäten (20.), (21.) entsprechen den Spezialfällen $\tau = 1, \varrho = 1$; es treten dann nur je zwei Einzelsummen auf, also einer obigen Bemerkung entsprechend explizite Darstellung ohne die Substitution (33.), was mit dem früheren übereinstimmt.

Zum Schluß seien noch zwei Spezialfälle der Zerlegungsidentität kurz erwähnt. Setzen wir in (31.): $\tau = \sigma$, $\varrho = n - \sigma$ und bezeichnen die Reihe p_τ als $p'_\sigma \backsim q'_{n-\sigma}$, so kommt:

$$(37.)\quad (A^\sigma | p_\sigma)(B^\sigma | p'_\sigma) - (A^\sigma | p'_\sigma)(B^\sigma | p_\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma, n-\sigma} \Pi (q_{n-\sigma-\alpha} B^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\alpha}).$$

Das ist die *Clebsch*sche Formel*) zur Entwicklung einer Form mit zwei kogredienten Reihen p_σ, p'_σ nach Elementarkovarianten. Die zu einer Form $(A^\sigma | p_\sigma)^m (B^\sigma | p'_\sigma)^n$ gehörenden Elementarkovarianten sind dann die folgenden:

$$(38.)\quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\sigma, n-\sigma} (q_{n-\sigma-\alpha} B^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\alpha}) \right\}^\varrho (A^\sigma | p_\sigma)^{m-\varrho} (B^\sigma | p_\sigma)^{n-\varrho}. \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots m, n)$$

*) *Clebsch*, a. a. O., S. 25—32. *Clebsch* weist nach, daß die einzelnen Glieder der rechten Seiten nur von den Reihen A, B abhängen; die explizite Darstellung würde sich durch Anwendung von (32.) auf seine Ausdrücke Φ_h ergeben.

Sie gehen, wie wir kurz sagen wollen, aus der Grundform durch „kogrediente Faltung vom Defekt α“ (vgl. § 2) hervor. —

Setzen wir zweitens: $\tau = \sigma - \lambda$, $\varrho = n - \sigma - \lambda$; $B^\sigma = A^\sigma$, so kommt:

$$(39.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}) = (-1)^\lambda (q_{n-\sigma-\lambda} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}) + (-1)^{(n-\sigma)(\sigma-\lambda)} \sum_{\alpha=1}^{\sigma-\lambda, n-\sigma-\lambda} \Pi (q_{n-\sigma-\lambda-\alpha} A^\sigma | A_{n-\sigma} p_{\sigma-\lambda}).$$

Es sind also, wie in § 2 bemerkt, die die Symbolreihen charakterisierenden Bedingungen (12.) für ungeraden Defekt λ eine Folge der Bedingungen von höherem Defekt. Für eine Linearform $(A^\sigma | p_\sigma) \equiv (B^\sigma | p_\sigma)$ ergibt sich aus (39.), daß sich ihre irreduzibeln invarianten Bildungen, die in den Koeffizienten quadratisch sind, auf solche von geradem Defekt reduzieren; das stimmt mit der bekannten Tatsache überein, daß eine Linearform im binären und ternären Gebiet keine invarianten Bildungen besitzt.

Bemerkt sei, daß die allgemeinen Identitäten ursprünglich abgeleitet sind unter der Annahme, daß die einzelnen Reihen den Bedingungen (12.) genügen. Da indes diese einzelnen Reihen nur linear in die Identitäten eingehen, so gelten letztere auch für die allgemeineren, den Bedingungen (12.) nicht genügenden Reihen.

§ 6. *Explizite Darstellung der invarianten Bildungen. Faltungs- und Differentiationsprozesse.*

Die Resultate der vorigen Paragraphen erlauben uns, den in § 2 ausgesprochenen Satz von der symbolischen Darstellbarkeit (1. Fundamentalsatz) durch Zufügung der *expliziten* Darstellbarkeit zum Abschluß zu bringen, indem wir zeigen:

Satz IV: „*Alle invarianten Bildungen beliebiger Grundformen lassen sich explizit durch Matrizenprodukte darstellen; d. h. in die Schlußausdrücke gehen außer Variabelnreihen p_ϱ nur die Reihen $S^\sigma, \ldots T^\tau$ der ursprünglichen Formen oder die durch Substitution* (9.) *oder* (11.) *aus ihnen abgeleiteten Reihen P, Q, R ein.*“

Zum Beweise nehmen wir an, eine invariante Bildung möge außer von Variabelnreihen von den Reihen $S^\sigma, \ldots T^\tau$ abhängen; und zwar seien diese Reihen genügend weit in einzelne Reihen: $S^\sigma = S^{\sigma_1} \ldots S^{\sigma_i}, \ldots T^\tau = T^{\tau_1} \ldots T^{\tau_k}$ aufgelöst, um eine Darstellung durch Determinanten zu ermöglichen. Die Reihen seien in einer an sich willkürlichen, aber bestimmt festgelegten

Reihenfolge $S^\sigma, \ldots T^\tau$ geordnet. Wir greifen nun ein solches Aggregat von Determinanten heraus, das von der ersten Gesamtreihe $S^\sigma = S^{\sigma_1} \cdots S^{\sigma_i}$, nicht nur von einzelnen der Teilreihen, abhängt. Diese Abhängigkeit ist aber nach § 3—§ 5 eine Folge der allgemeinen Identitäten. Lösen wir nun eine Variabelnreihe p_ϱ in die Reihen y, v, oder eine der späteren Reihen T in die einzelnen Reihen t, bzw. τ auf, so sind die allgemeinsten Identitäten aus (20.), (21.) zusammengesetzt. Diese letzteren Identitäten führen aber immer zu einem die Reihe $S^\sigma = S^{\sigma_1} \cdots S^{\sigma_i}$ explizit enthaltenden Ausdruck, der linken Seite von (20.), (21.); man überzeugt sich nämlich durch (19.), daß erst die vollständige rechts stehende Summe — nicht aber ein Teil derselben, der einem Gliede von (20ª.) entspricht — die Eigenschaft besitzt, nur von S^σ abzuhängen. Bei Fortsetzung des Verfahrens bleiben alle einmal explizit eingehenden Reihen auch explizit erhalten; die Anwendung der Identitäten kann nur möglicherweise ein Zusammenfassen mehrerer Reihen zu einer einzigen, d. h. die Substitution (9.), verlangen. Ist schließlich nur noch eine einzige Reihe T^τ auf die explizite Form zu bringen, so sind zwei Fälle möglich. Es kann noch eine freie, d. h. nicht durch Substitution (9.) mit andern Reihen verbundene, Variabelnreihe auftreten; durch deren Zerlegung in Teilreihen y oder v läßt sich das Verfahren zum Abschluß bringen; es entstehen, wie in (31.), Polaren einer oder mehrerer, alle Reihen explizit enthaltenden Formen. Tritt keine freie Variabelnreihe mehr auf, so erkennen wir nach der Art, wie sie entstanden sind, in der Gesamtheit der Ausdrücke, die die einzelnen Reihen t oder τ enthalten, aber von der Reihe T^τ abhängen, die Glieder einer Zerlegungsidentität; diese aber lassen nach § 5 unter Anwendung der Substitution (11.) stets die explizite Darstellung in allen Reihen zu. *Damit ist der obige Satz allgemein bewiesen.* Bemerkt mag noch werden, daß dann, wenn nur zwei Symbolreihen auftreten, die Substitution (11.) nie eintritt; es können nämlich — wegen $\sigma, n-\sigma, \tau, n-\tau < n$ — nur dann keine Variabelnreihen eingehen, wenn die beiden Symbolreihen in einer einzigen Determinante vereinigt, also explizit auftreten; sobald aber Variabelnreihen eingehen, zeigen (34.) und (33.), daß die Substitution (11.) überflüssig wird.

Aus dem eben Gesagten folgt, daß es zur Erzeugung aller invarianten Bildungen genügt, die Symbolreihen unter Zufügung von Variabelnreihen zu allen möglichen Matrizenprodukten zu vereinigen. Das allgemeinste

Matrizenprodukt ist nun von der Form:

$$(40.) \qquad (P^{\mu_1} \dots P^{\mu_i} | Q_{\nu_1} \cdots Q_{\nu_k}); \quad \Sigma\mu = \Sigma\nu,$$

wo die P und Q Reihen der ursprünglichen Formen sein können, oder durch eine Reihenfolge von Substitutionen (9.) oder (11.) aus den ursprünglichen Reihen hervorgegangen, oder endlich Variabelnreihen. Die Ausdrücke (40.) aber lassen sich erzeugen durch sukzessive Vereinigung je zweier Symbolreihen zu einem Matrizenprodukt, unter Zuhilfenahme von Variabelnreihen; denn man erhält aus

$$(q_{n-\mu-\lambda} P^{\mu} | Q_{\nu_1} p_{n-\nu_1-\lambda}) = (R_\lambda Q_{\nu_1} p_{n-\nu_1-\lambda})$$

durch Vereinigung mit der Reihe Q_{ν_2} einen Ausdruck

$$([R_\lambda Q_{\nu_1}]^{n-\lambda-\nu_1} | Q_{\nu_2} p_{n-\nu_1-\nu_2-\lambda}) = (q_{n-\mu-\lambda} P^{\mu} | Q_{\nu_1} Q_{\nu_2} p_{n-\nu_1-\nu_2-\lambda}),$$

also durch Fortsetzung des Verfahrens einen Ausdruck (40.). Sind dabei P und Q nicht die Reihen der ursprünglichen Formen, so zeigt (9.) und (11.) in Verbindung mit dem eben Gezeigten, daß sie gleichfalls durch eine Reihenfolge von Vereinigungen je zweier Symbolreihen entstanden sind. Es folgt daraus:

Satz V: Der Prozeß zur Erzeugung aller invarianten Bildungen, der Faltungsprozeß, besteht in der sukzessiven Vereinigung je zweier Symbolreihen zu einem Matrizenprodukt, unter Zuhilfenahme von Variabelnreihen.

Aus zwei Symbolreihen S^σ, T^τ, wo $\sigma \geqq \tau$, lassen sich nun die folgenden Matrizenprodukte bilden:

$$(41.) \qquad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}); \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \tau, n-\sigma)$$

$$(42.) \qquad (q_{n-\tau-\mu} T^\tau | S_{n-\sigma} p_{\sigma-\mu}); \qquad (\mu = \sigma-\tau+\lambda)$$

$$(43.) \qquad (q_{n-\tau-\nu} T^\tau | S_{n-\sigma} p_{\sigma-\nu}). \qquad (\nu = 1, 2, \dots \sigma-\tau)$$

Aus (31.) ergeben sich aber für (42.) und (43.) die Werte:

$$(42^a.) \quad (q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda}) + \sum_\alpha \Pi (q_{n-\sigma-\lambda-\alpha} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\lambda-\alpha});$$

$$(43^a.) \quad \Pi (q_{n-\sigma} S^\sigma)(T_{n-\tau} p_\tau) + \sum_\beta \Pi (q_{n-\sigma-\beta} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-\beta}).$$

Es lassen sich also die Formen (42.) linear ausdrücken durch (41.) und Polaren von (41.), die Formen (43.) durch Polaren der Grundform und der Formen (41.). Ebenso ergibt sich aus (31.) die lineare Abhängigkeit der Formen (41.) von (42.) und Polaren von (42.). Danach sind aber nach der *Clebsch*schen Definition*) die Formen (42.) den Formen (41.)

*) *Clebsch*, a. a. O. § 7.

äquivalent, während (43.) auf die Grundform zurückführt. Der erzeugende Prozeß ist also gleichberechtigt durch (41.) oder (42.) gegeben; wir wollen den in bezug auf die Zahl λ einfacheren *Prozeß* (41.) *als Faltungsprozeß definieren.* Die Zahl λ, der *Defekt der Faltung* (vgl. § 2) gibt die Anzahl der zum Determinantenprodukt fehlenden Reihen an, und zwar in demjenigen Matrizenprodukt, das bei gegebener Faltung die Maximalzahl von Reihen enthält. Da λ nur bis zum kleineren der beiden Werte $\tau, n-\sigma$ läuft, wo $\sigma \geqq \tau$, so ist:

$$(44.) \qquad \lambda \leqq \frac{n}{2},\ n \text{ gerade}; \quad \lambda \leqq \frac{n-1}{2},\ n \text{ ungerade}.$$

Die Zurückführung von (42.) und (43.) auf (41.) gilt auch dann noch, wenn durch weitere Faltung die Reihen p, q in Symbolreihen übergegangen sind; denn nach (36.) kommt:

$$(A^{n-\tau-\varkappa}\, T^{\tau} \,|\, S_{n-\sigma}\, B_{\sigma-\varkappa}) = \sum_{0,\,\varkappa-\sigma+\tau}^{\tau,\,n-\sigma}{}^{\alpha} \varepsilon\, (R^{\tau-\alpha}\, B^{n-\sigma+\varkappa} \,|\, A_{\tau+\varkappa}\, R_{n-\sigma-\alpha}),$$

wo die Reihen R nach (33.) aus S und T hervorgegangen sind. Man erhält also diese nur Symbolreihen enthaltenden Formen durch Faltung von $(q_{\tau}\, A^{n-\tau-\varkappa} | B_{\sigma-\varkappa}\, p_{n-\sigma})$ bzw. $(q_{\tau-\alpha}\, B^{n-\sigma+\varkappa} | A_{\tau+\varkappa}\, p_{n-\sigma-\alpha})$, — je nachdem $\sigma-\tau \gtrless 2\varkappa$ — mit der Grundform und den Formen (41.).

Aus dem symbolischen Faltungsprozeß gewinnt man in bekannter Weise die *invarianten Differentiationsprozesse,* wenn man nur die Symbolreihen $S^{\sigma}, T_{n-\tau}$ durch die Reihen von Differentiationssymbolen $\frac{\partial}{\partial p_{\sigma}}, \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}}$ ersetzt, wobei bekanntlich jedem Produkte $\frac{\partial}{\partial p_{i_1 \ldots i_{\sigma}}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_{j_1 \ldots j_{n-\tau}}}$ die reale Bedeutung $\frac{\partial^2}{\partial p_{i_1 \ldots i_{\sigma}} \partial q_{j_1 \ldots j_{n-\tau}}}$ zukommt. Da die Reihen $\frac{\partial}{\partial p_{\sigma}}, \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}}$ den Reihen $S^{\sigma}, T_{n-\tau}$ kogredient sind, genügen sie denselben Identitäten wie diese, also speziell auch den zwischen (42.) und (42ª.), (43.) und (43ª.) bestehenden. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz VI: Alle invarianten Bildungen beliebiger Grundformen entstehen aus diesen durch wiederholte Anwendung des symbolischen Faltungsprozesses (41.) *oder auch der invarianten Differentiationsprozesse:*

$$(45.) \qquad \left(q_{n-\sigma-\lambda}\, \frac{\partial}{\partial p_{\sigma}} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial q_{n-\tau}}\, p_{\tau-\lambda}\right). \qquad (\sigma \geqq \tau,\ \lambda = 1, 2, \ldots \sigma, n-\tau)$$

Es ist noch zu bemerken, daß bei jeder Faltung (41.) das Gesamt-

gewicht der Form, d. h. die Summe der Gewichte der einzelnen Variabelnreihen (vgl. § 1), abnimmt um die positive Zahl $2(\lambda^2+\lambda(\sigma-\tau))$. Daraus folgt, unabhängig vom allgemeinen Endlichkeitsbeweis, die Endlichkeit der *Formenreihe*, d. h. der Gesamtheit der in den Koeffizienten linearen invarianten Bildungen einer gegebenen Grundform*).

Bemerkt sei weiter, daß Satz VI auch noch gilt für Formen, die den Bedingungen (12.) nicht genügen. Es läßt sich nämlich jeder Faktor von (3.): $(S^\varrho|p_\varrho)^{m_\varrho}$ ersetzen durch ein Produkt von m_ϱ Linearfaktoren $(A^\varrho|p_\varrho)(B^\varrho|p_\varrho)\cdots(M^\varrho|p_\varrho)$, wodurch die invarianten Bildungen übergehen in solche eines Systems von Linearformen, die erst nachträglich einander gleich gesetzt zu werden brauchen. Für jede einzelne Linearform aber sind die Bedingungen (12.), die bei Einführung von Differentialsymbolen nur Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, stets erfüllt.

§ 7. *Entwicklung der allgemeinen Formen nach Normalformen.*

Wir werden im folgenden (§ 8) eine Haupteigenschaft des Faltungsprozesses (41.) ableiten, seine Zusammensetzbarkeit aus Grundfaltungen, bedürfen dazu aber der Übertragung eines wichtigen, von Herrn *Mertens***) im quaternären Gebiete gegebenen Satzes auf das n-näre Gebiet. Dieser Satz sagt aus, daß sich ein beliebiges endliches System von Formen ersetzen läßt durch ein äquivalentes System von Normalformen. Unter „*Normalform*" verstehen wir dabei — in Verallgemeinerung der binären und ternären Definition***) — *eine Form, deren sämtliche in den Koeffizienten lineare invariante Bildungen identisch verschwinden mit Ausnahme der Grundform selbst.* Nach Satz VI (§ 6) genügt also eine Normalform φ dem System von Differentialgleichungen:

$$(46.)\qquad \left(q_{n-\sigma-\lambda}\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\middle|\frac{\partial}{q_{n-\tau}}p_{\tau-\lambda}\right)=0\,,\qquad (\sigma\geqq\tau;\ \lambda=1,2,\dots\tau,n-\sigma)$$

wo die Reihen $q_{n-\sigma-\lambda}$, $p_{\tau-\lambda}$ als willkürliche Größen zu betrachten sind. Diese Differentialgleichungen stimmen im quaternären Gebiet — unter Be-

---

*) Vgl. *Clebsch*, a. a. O. § 11 u. 12. Endlichkeit des Systems von Elementarkovarianten.

**) *F. Mertens*, Über invariante Gebilde quaternärer Formen (siehe Einleitung), zitiert als „*Mertens*".

***) *Study*, a. a. O. S. 54.

rücksichtigung von (39.) für $\sigma=\tau=2$ — mit den von Herrn *Mertens* ohne Einführung der willkürlichen Reihen p, q gegebenen 10 Differentialgleichungen (a. a. O., Formel 28)) vollständig überein; ihre Kenntnis, zusammen mit Satz VI, erlaubt uns, das dortige Beweisverfahren fast wörtlich auf n Variable zu übertragen. Hinzuzufügen ist einzig der mittels der Zerlegungsidentität (30.) erbrachte Nachweis, daß die konstruierten Formen Normalformen sind; im quaternären Gebiet ergibt sich dieser Nachweis noch ohne weitere Umformung. Es genügt deshalb auch eine kurze Darlegung des Beweises, und zwar der Einfachheit halber in dem für das folgende nur in Betracht kommenden Fall einer einzigen Grundform f und ihrer Formenreihe (vgl. § 6 Schluß), da für invariante Bildungen beliebigen Grades in den Koeffizienten beliebig vieler Grundformen der Beweis derselbe bleibt.

Der Grundgedanke des Beweises ist, durch Einführung der transformierten Koeffizienten eine Form mit $n-1$ Reihen p_ϱ zu ersetzen durch Formen mit n den x kogredienten Reihen ξ, den Reihen der Transformationsgrößen. Aus diesen Formen leiten sich durch invariante Differentiationsprozesse direkt die gesuchten Normalformen ab. Die Entwicklung der allgemeinen Formen nach Normalformen wird vermittelt durch eine Reihenentwicklung für Formen mit ϱ ($\varrho \leqq n$) kogredienten Reihen ξ; invariante Differentiationsprozesse führen zu den Formen in den ursprünglichen Reihen p_ϱ zurück.

Es seien $\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n)}$ die Reihen der Transformationsgrößen, so daß man hat:

$$(47.)\qquad \begin{aligned} x_i &= \xi_i^{(1)} x_1' + \xi_i^{(2)} x_2' + \cdots + \xi_i^{(n)} x_n', \\ p_{i_1 \cdots i_\varrho} &= \sum_j (\xi_{i_1}^{(j_1)} \cdots \xi_{i_\varrho}^{(j_\varrho)})\, p'_{j_1 \cdots j_\varrho}. \end{aligned}$$

Die transformierten Koeffizienten der Formen $f, \varphi, \ldots$ seien mit $(f), (\varphi), \ldots$ bezeichnet, und es sei

$$f \equiv (S^1 \,|\, p_1)^{m_1} (S^2 \,|\, p_2)^{m_2} \cdots (S^{n-1} \,|\, p_{n-1})^{m_{n-1}}.$$

Es wird dann:

$$(48.)\qquad \begin{aligned} (f) &= (S^1 \,|\, \xi^{(1)})^{m_{11}} \cdots (S^1 \,|\, \xi^{(n)})^{m_{1n}} (S^2 \,|\, \xi^{(1)} \xi^{(2)})^{m_{21}} \cdots (S^{n-1} \,|\, \xi^{(2)} \cdots \xi^{(n)})^{m_{n-1,n}} \\ &= (s^{(1)} \,|\, \xi^{(1)})^{k_1} (s^{(2)} \,|\, \xi^{(2)})^{k_2} \cdots (s^{(n)} \,|\, \xi^{(n)})^{k_n}, \end{aligned}$$

wo $m_{11} + \cdots + m_{1n} = m_1$ usf. Aus jedem Koeffizienten (f), für den

$$(49.)\qquad k_1 \geqq k_2 \geqq k_3 \cdots \geqq k_n,$$

ergibt sich durch den die Reihen ξ genau erschöpfenden Differentiationsprozeß:

$$(50.)\quad \Big(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}}\,\Big|\,p_1\Big)^{k_1-k_2}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}}\,\Big|\,p_2\Big)^{k_2-k_3}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}}\cdots\frac{\partial}{\partial \xi^{(n-1)}}\,\Big|\,p_{n-1}\Big)^{k_{n-1}-k_n}\Big(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}}\cdots\frac{\partial}{\partial \xi^{(n)}}\Big)^{k_n}$$

die Form

$$(51.)\quad \varphi=(s^{(1)}\,|\,p_1)^{k_1-k_2}(s^{(1)}s^{(2)}\,|\,p_2)^{k_2-k_3}\cdots(s^{(1)}\cdots s^{(n-1)}\,|\,p_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(s^{(1)}s^{(2)}\cdots s^{(n)})^{k_n}.$$

Die Formen φ sind die gesuchten Normalformen. Sie haben nämlich die folgenden, die Normalformen definierenden Eigenschaften:

1. *Sie sind in den Koeffizienten lineare invariante Bildungen der Grundform f.* Dies folgt daraus, daß sie aus f durch die invarianten Differentiationsprozesse $\Big(\frac{\partial}{\partial p_\varrho}\,\Big|\,\xi^{(i_1)}\xi^{(i_2)}\cdots\xi^{(i_\varrho)}\Big)$ und (50.) hervorgehen. Sie lassen sich also (nach § 6 Schluß) linear ausdrücken durch Polaren der endlichen Formenreihe von f. Man erhält diese Polaren, indem man die in φ eingehenden Variabeln p_ϱ auffaßt als Koeffizienten einer in Linearformen zerfallenden Form mit den Variabelnreihen $\mathfrak{p}_\sigma$:

$$(52.)\quad H=(q_{n-1}\,|\,\mathfrak{p}_{n-1})^{k_1-k_2}(q_{n-2}\,|\,\mathfrak{p}_{n-2})^{k_2-k_3}\cdots(q_1\,|\,\mathfrak{p}_1)^{k_{n-1}-k_n}.$$

Die Simultaninvarianten der Formenreihen f und H ergeben alle in Betracht kommenden Polaren, da diese letzteren in den einzelnen Reihen p_ϱ von gleicher Dimension sein müssen wie φ selbst.

2. *Sie genügen den Differentialgleichungen* (46.). Wendet man nämlich auf φ den Differentialprozeß (45.) an, so kommt:

$$\varphi'=(q_{n-\sigma-\lambda}\,s^{(1)}\cdots s^{(\sigma)}\,|\,[s^{(1)}\cdots s^{(\tau)}]_{n-\tau}\,p_{\tau-\lambda}). \qquad (\sigma\geqq\tau)$$

Aus der Zerlegungsidentität (30.) folgt, wenn man die aus den Reihen s gebildeten Reihen $q_\sigma=s^{(1)}\cdots s^{(\sigma)}$, $p_{n-\tau}=[s^{(1)}\cdots s^{(\tau)}]_{n-\tau}$ mit den dortigen q_ϱ, p_τ identifiziert:

$$\varphi'=\sum_{\beta=\sigma-\tau+\lambda}^{n-\tau,\,\sigma}\ \sum_{i_\beta}\varepsilon\,(\dot q^{(i_1\cdots i_\beta)}_{\sigma-\beta}\,q_{n-\tau+\lambda}\,|\,p_{\sigma+\lambda}\,\dot p^{(i_1\cdots i_\beta)}_{n-\tau-\beta}).$$

Es wird dabei:

$$\dot p^{(i_1\ldots i_\beta)}_{n-\tau-\beta}\frown s^{(1)}\cdots s^{(\tau)}\,s^{(i_1)}\cdots s^{(i_\beta)},$$

wo $i_1,\ldots i_\beta$ irgendwelche β, aus den Zahlen 1 bis σ herausgegriffene, von einander verschiedene Zahlen bedeuten. Da nun $\beta>\sigma-\tau$, so folgt, daß sich unter diesen Zahlen $i_1,\ldots i_\beta$ notwendig solche zwischen 1 bis τ befinden; damit verschwindet aber $\dot p^{(i_1\cdots i_\beta)}_{n-\tau-\beta}$ identisch, folglich jedes einzelne Matrizenprodukt und damit auch φ'.

Zur Äquivalenz des Systems der Normalformen mit der Formen-

reihe f bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß sich alle Formen der Formenreihe nach Polaren der Normalformen in dem unter 1. festgelegten Sinne entwickeln lassen. Es sei Π ein Aggregat von Polaroperationen

$$(53.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(i)}} \middle| \xi^{(k)}\right), \qquad (i \neq k;\ i=1,2,\dots\varrho;\ k=1,2,\dots\varrho)$$

und Π^σ ein Aggregat der speziellen Operationen (53.), für die $i=\sigma$ und $k<\sigma$. Für eine Form F der ϱ Reihen $\xi^{(1)},\dots\xi^{(\varrho)}$, die in der Reihe $\xi^{(\varrho)}$ vom Grade k_ϱ sei, gilt dann die Entwicklung*):

$$(54.) \qquad F=\sum_{\alpha=0}^{k_\varrho} \Pi F_\alpha, \qquad (\varrho \leqq n)$$

wo F_α in der letzten Reihe $\xi^{(\varrho)}$ vom α-ten Grade ist und aus F durch die invarianten Differentialoperationen

$$(55.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(\varrho)}} \middle| \xi^{(1)} \cdots \xi^{(\varrho)}\right)^\alpha$$

und Π^ϱ hervorgeht. Ersetzt man bei der Erzeugung von F_α den Prozeß (55.) durch

$$(56.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(\varrho)}} \middle| p_\varrho\right)^\alpha,$$

so entsteht eine Form $F_\alpha(p_\varrho)$ mit nur $\varrho-1$ Reihen $\xi^{(1)},\dots\xi^{(\varrho-1)}$, auf die sich wieder (54.) anwenden läßt. Die Fortsetzung des Verfahrens führt zu Formen $G(p_\varrho, p_{\varrho-1},\dots p_1)$. Um aus diesen die Entwicklung von F nach (54.) zu erhalten, hat man die einzelnen Reihen p_σ durch $\xi^{(1)},\dots\xi^{(\sigma)}$ zu ersetzen und auf die entstehenden Formen den Polarprozeß Π (53.) anzuwenden; dies gibt (vgl. (48.)) eine Summe von transformierten Koeffizienten (G). Für $\varrho=n$ bleibt beim ersten Schritt der Prozeß (55.) erhalten. Bedeuten c numerische Konstanten und wird noch abkürzend gesetzt

$$(57.) \qquad (\xi^{(1)}\xi^{(2)}\dots\xi^{(n)}) = \Delta; \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}}\cdots\frac{\partial}{\partial \xi^{(n)}}\right) = \nabla,$$

so kommt im Falle $\varrho=n$:

$$(58.) \qquad F=\Sigma c\, \Delta^\alpha (G),$$

während für $\varrho<n$ nur $\alpha=0$, also $\Sigma c(G)$ rechts eintritt.

Wenden wir (58.) auf einen transformierten Koeffizienten (f) (48.) an, so wird, wegen der Vertauschbarkeit der Polarprozesse Π^σ mit allen

*) *F. Mertens*, Über eine Formel der Determinantentheorie. Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., Bd. 91. 2. Abt. (1885). Formel 20).

Operationen (56.), für die $\varrho \geqq \sigma$, und da Polaren transformierter Koeffizienten wieder transformierte Koeffizienten ergeben:

$$G = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} | p_1\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}} | p_2\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{(n-1)}} | p_{n-1}\right)^{\beta_{n-1}} \nabla^{\beta_n} \Pi(f)$$
$$= \Sigma c \varphi$$

und aus (58.) folgt:

(59.) $$(f) = \Sigma c \Delta^a (\varphi) \quad (\textit{Mertens}, \text{ Formel 23})).$$

Um von (59.) zur Entwicklung von f selbst überzugehen, betrachten wir wieder die Variabeln p_ϱ als Koeffizienten einer Form H (52.) mit den f entsprechenden Gradzahlen $m_1, \ldots m_{n-1}$, und es sei $m = m_1 + \cdots + m_{n-1}$. Es wird dann, nach der Definition der Invarianten:

$$f \cdot \Delta^m = \Sigma (f)(H) = \Sigma c \Delta^a (\varphi)(H),$$

und die Anwendung des die Reihen ξ genau erschöpfenden Prozesses ∇^m ergibt:

(60.) $$f = \Sigma c \Phi,$$

wo die Formen Φ aus φ und H durch invariante Differentiationsprozesse nach den Variabeln abgeleitet, also Simultaninvarianten der Formenreihen φ und H sind*). Nun beschränkt sich aber, da φ Normalform, die Formenreihe φ auf die Form φ selbst; die Formenreihe H enthält alle überhaupt möglichen invarianten Variabelnverbindungen; die Simultaninvarianten von φ und H sind also die Polaren von φ in dem unter 1. angegebenen Sinne; d. h. (60.) stellt die Entwicklung von f nach Polaren der Normalformen dar. Wir haben jetzt noch die gleiche Entwicklung für eine beliebige Form θ der Formenreihe f nachzuweisen. Es seien I' die aus (θ) durch (50.) abgeleiteten Normalformen, so daß man hat:

(61.) $$(\theta) = \Sigma c \Delta^\beta (I').$$

Die Formen θ sind charakterisiert durch die für jeden transformierten Koeffizienten geltende Relation:

$$(\theta) \Delta^\sigma = \Sigma c (f) \quad (\textit{Mertens}, \text{ Formel 9})).$$

Da aber eine jede Form F der n Reihen ξ, die den Faktor Δ^σ enthält, auch den zweiten $\nabla^\sigma \Pi F$ enthält (*Mertens*, Formel 20)), so folgt:

$$(\theta) = \Sigma c \nabla^\sigma (f), \text{ also } I' = \Sigma c \varphi,$$

---

*) An Stelle des direkten Schlusses werden bei *Mertens*, § 7 eine Reihe weiterer Differentialprozesse eingeführt, die wesentlich die Bildung der Formenreihe H bezwecken, was unser Satz VI leistet.

und daraus nach (61.) die (59.) entsprechende Relation:

$$(\theta) = \Sigma c \Delta^{\beta} (\varphi),$$

die für θ die Entwicklung (60.) nach Polaren der Normalformen φ nach sich zieht. Zusammenfassend haben wir:

Satz VII. Eine jede Formenreihe f läßt sich ersetzen durch ein äquivalentes System von Normalformen.

§ 8. *Zurückführung des Faltungsprozesses auf Grundfaltungen.*

Im Anschluß an Satz VII führen wir jetzt die am Anfang vom § 7 erwähnte Zurückführung des Faltungsprozesses auf Grundfaltungen durch. Wir bezeichnen dabei (vgl. § 5) jede Faltung zweier kogredienter Reihen S^{ϱ}, T^{ϱ} als *„kogrediente Faltung"*, und speziell die kogrediente Faltung vom Defekt 1 zweier Reihen S^{ϱ}, T^{ϱ} als *„Grundfaltung vom Typus ϱ"*. Dann beweisen wir, in Vervollständigung von Satz VI, den

Satz VIII: Der allgemeine Faltungsprozeß (41.) *läßt sich zusammensetzen aus den* $(n-1)$ *Grundfaltungen vom Typus* ϱ, *wo* $\varrho = 1, 2, \ldots n-1$. *Mit anderen Worten: Zur Erzeugung aller invarianten Bildungen genügt die sukzessive Anwendung der* $n-1$ *Grundfaltungen.*

Im binären Gebiet fällt der Faltungsprozeß (41.) direkt mit der einzigen möglichen Grundfaltung zusammen; im ternären Gebiet habe ich Satz VIII in § 1 meiner Dissertation (vgl. Einleitung) bewiesen. Es sind dort, wegen (44.), die allgemeinen kogredienten Faltungen noch identisch mit den Grundfaltungen, und es ist bemerkenswert, daß Satz VIII für n Variable die Reduktion auf Grundfaltungen leistet, und nicht nur die viel schwächere auf kogrediente Faltungen. Der Beweis ist im Prinzip dem ternären nachgebildet, indem die allgemeinsten Faltungen aus den Grundfaltungen konstruiert werden, unter Anwendung der symbolischen Identitäten. Wir werden erzeugen:

1) beliebige Faltungen vom Defekt 1 durch kogrediente vom Defekt 1, d. h. durch Grundfaltungen (Analogon zum ternären Fall),
2) beliebige Faltungen vom Defekt λ durch kogrediente vom Defekt λ und durch beliebige Faltungen vom Defekt 1,
3) kogrediente Faltungen vom Defekt λ durch kogrediente vom Defekt $\lambda-1$ und durch beliebige Faltungen vom Defekt 1.

Dabei setzen wir, was wesentlich ist, nach Satz VII die beiden zu faltenden Formen S und T als Normalformen voraus. Es gelten also, nach (46.), die Relationen:

$$(62.)\qquad \begin{aligned} &(q_{n-\sigma_1-\lambda} S^{\sigma_1} | S_{n-\sigma_2} p_{\sigma_2-\lambda}) = 0, \qquad (\sigma_1 \geqq \sigma_2, \lambda = 1,2,\dots\sigma_2, n-\sigma_1)\\ &(q_{n-\tau_1-\lambda} T^{\tau_1} | T_{n-\tau_2} p_{\tau_2-\lambda}) = 0. \qquad (\tau_1 \geqq \tau_2, \lambda = 1,2,\dots\tau_2, n-\tau_1)\end{aligned}$$

Es genügt weiter, nach § 2 (Schluß) die Formen S und T in allen Variabelnreihen linear anzunehmen; d. h. die konstruierten Formen gehören der Formenreihe an:

$$f = (S^1|p_1)(S^2|p_2)\cdots(S^{n-1}|p_{n-1})(T^1|p_1)(T^2|p_2)\cdots(T^{n-1}|p_{n-1}).$$

1) *Erzeugung von* $(q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-1})$, *wo* $\sigma > \tau$, *aus Grundfaltungen vom Typus* $\tau+\alpha$; $\alpha = 0,1,\dots\sigma-\tau$. Aus der Grundfaltung vom Typus τ

$$(q_{n-\tau-1} S^\tau | T_{n-\tau} p_{\tau-1})$$

erhalten wir durch die Substitution

$$w \rightharpoonup T_{n-\tau} p_{\tau-1}$$

eine Form der Formenreihe f, mit drei Reihen vom oberen Gewichtsindex (vgl. § 1) $\tau+1$:

$$(63.)\qquad (wS^\tau | p_{\tau+1})(S^{\tau+1}|p_{\tau+1})(T^{\tau+1}|p_{\tau+1}).$$

Eine Grundfaltung vom Typus $\tau+1$, angewandt auf (63.), ergibt:

$$(q_{n-\tau-2} wS^\tau | S_{n-\tau-1} p_\tau);$$

aus (31.) ergibt sich daraus, durch die Substitution $q_{n-\tau-2} w = q'_{n-\tau-1}$, der Wert:

$$\varepsilon (q_{n-\tau-2} wS^{\tau+1})(S^\tau|p_\tau) + \sum_{\alpha=1}^{\tau, n-\tau-1} \Pi (q'_{n-\tau-1-\alpha} S^{\tau+1} | S_{n-\tau} p_{\tau-\alpha}).$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen verschwindet nach (62.) identisch; wir sind also zu einer Form gelangt:

$$(wS^{\tau+1}|p_{\tau+2})(S^{\tau+2}|p_{\tau+2})(T^{\tau+2}|p_{\tau+2}),$$

die aus (63.) durch Verwandlung von τ in $\tau+1$ hervorgeht. Die $(\sigma-\tau)$-fache Wiederholung des Prozesses führt also zu der gesuchten Faltung:

$$(wS^\sigma | p_{\sigma+1}) = \varepsilon (q_{n-\sigma-1} S^\sigma | T_{n-\tau} p_{\tau-1}).$$

Wir deuten den durchgeführten Prozeß kurz an durch die Formel:

$$(64.)\qquad T^\tau S^\tau,\ S^{\tau+1},\ S^{\tau+2},\dots S^\sigma;$$

wir sehen, daß nur die Normalformeigenschaft von S, nicht aber die von T, benutzt wird. Ein zu (64.) dualistischer Prozeß läßt sich unter alleiniger

Benutzung der Normalformeigenschaft von T in umgekehrter Reihenfolge durchführen, nämlich der folgende:

(65.) $$S^\sigma T^\sigma,\ T^{\sigma-1},\ T^{\sigma-2},\dots T^\tau$$

nach den Relationen:

$$(q_{n-\sigma-1}S^\sigma \,|\, T_{n-\sigma}p_{\sigma-1}) = \varepsilon\,(T_{n-\sigma}y\,p_{\sigma-1}),\ \text{wo}\ y \backsim q_{n-\sigma-1}S^\sigma,$$
$$(q_{n-\sigma}T^{\sigma-1} \,|\, T_{n-\sigma}y\,p_{\sigma-2}) = \varepsilon\,(T_{n-\sigma+1}y\,p_{\sigma-2}),$$
$$\vdots$$
$$(q_{n-\tau-1}T^{\tau} \,|\, T_{n-\tau-1}\,y\,p_{\tau-1}) = \varepsilon\,(q_{n-\sigma-1}S^\sigma \,|\, T_{n-\tau}p_{\tau-1}).$$

Es mag noch auf den Zusammenhang mit der in § 6 (Schluß) angegebenen Abnahme des Gesamtgewichtes hingewiesen werden, die für Faltungen vom Defekt 1 den Wert $2(1+(\sigma-\tau))$, für Grundfaltungen den Wert $2\cdot 1$ hat. Wenn also die Zusammensetzbarkeit aus Grundfaltungen überhaupt möglich ist, so sind notwendig $\sigma-\tau+1$ solcher dazu erforderlich, wie oben durchgeführt.

2) *Erzeugung allgemeiner Faltungen aus kogredienten und Grundfaltungen.* Die Gewichtsabnahme beträgt für eine allgemeine Faltung (41.): $2(\lambda^2+\lambda(\sigma-\tau)) = 2[\lambda^2+(\sigma-\tau)(1+(\lambda-1))]$, ergibt also die Möglichkeit einer Zerlegung in eine kogrediente Faltung vom Defekt λ (Gewichtsabnahme $2\lambda^2$) und $\sigma-\tau$ Faltungen vom Defekt 1 und der Differenz der Gewichtsindizes $\lambda-1$ (Gewichtsabnahme $2\{1+(\lambda-1)\}$). Diese Zerlegung stimmt im Falle $\lambda=1$ mit der unter 1) angegebenen überein; wir zeigen, daß sie sich in der Tat realisieren läßt.

Aus der kogredienten Faltung vom Defekt λ

$$(q_{n-\tau-\lambda}S^\tau \,|\, T_{n-\tau}\,p_{\tau-\lambda})$$

erhalten wir durch die Substitution: $R^\lambda \backsim T_{n-\tau}\,p_{\tau-\lambda}$ eine Form mit den beiden Reihen vom oberen Gewichtsindex $\tau+\lambda$ und $\tau+1$:

(66.) $$(R^\lambda S^\tau \,|\, p_{\tau+\lambda})(S^{\tau+1} \,|\, p_{\tau+1}).$$

Die Reihe mit dem niedrigeren Gewichtsindex $\tau+1$ gehört einer Normalform an; (66.) läßt also eine aus λ Grundfaltungen zusammengesetzte Faltung vom Defekt 1 zu, in der Reihenfolge von (65.):

$$(R^\lambda S^\tau)S^{\tau+\lambda},\ S^{\tau+\lambda-1},\ S^{\tau+\lambda-2},\dots S^{\tau+1}.$$

Dies ergibt, unter Berücksichtigung von (31.) und (62.):

$$(q_{n-\tau-\lambda-1}R^\lambda S^\tau \,|\, S_{n-\tau-1}p_\tau) = \varepsilon(R^\lambda S^{\tau+1} \,|\, p_{\tau+\lambda+1}),$$

also eine Form, die aus (66.) durch Verwandlung von τ in $\tau+1$ hervor-

geht, analog wie dies unter 1) mit (63.) der Fall war. Die $(\sigma-\tau)$-fache Wiederholung des Prozesses führt zu der gesuchten Faltung:

$$(R^\lambda S^\sigma \,|\, p_{\sigma+\lambda}) = \varepsilon\,(q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma \,|\, T_{n-\tau}\, p_{\tau-\lambda}).$$

Bei dem ganzen Prozeß war allein die Normalformeigenschaft von S benutzt; die Betrachtung von T als Normalform führt auf den dualistischen Prozeß, mit vollständiger Umkehrung der Reihenfolge, nach den Formeln:

$$(q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma \,|\, T_{n-\sigma}\, p_{\sigma-\lambda}) = \varepsilon\,(T_{n-\sigma} R_\lambda\, p_{\sigma-\lambda}),\ \text{wo}\ R_\lambda \backsim q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma,$$
$$(q_{n-\sigma}\, T^{\sigma-1} \,|\, T_{n-\sigma} R_\lambda\, p_{\sigma-\lambda-1}) = \varepsilon\,(T_{n-\sigma+1} R_\lambda\, p_{\sigma-\lambda-1}),$$
$$\vdots$$
$$(q_{n-\tau-1}\, T^\tau \,|\, T_{n-\tau-1} R_\lambda\, p_{\tau-\lambda}) = \varepsilon\,(q_{n-\sigma-\lambda} S^\sigma \,|\, T_{n-\tau}\, p_{\tau-\lambda}).$$

3) *Erzeugung kogredienter Faltungen vom Defekt λ aus kogredienten vom Defekt $\lambda-1$ und Grundfaltungen.* Die Gewichtsabnahme für kogrediente Faltungen vom Defekt λ beträgt: $2\lambda^2 = 2((\lambda-1)^2 + 2\lambda - 1)$, läßt also die Möglichkeit einer Zerlegung in eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$ und $2\lambda-1$ Grundfaltungen zu. Wir finden dieselbe am einfachsten, wenn wir erst speziell setzen: $n=2\lambda$. Die einzig mögliche kogrediente Faltung vom Defekt λ wird: $(S^{\frac{n}{2}} \,|\, T_{\frac{n}{2}}) = (S^\lambda \,|\, T_\lambda)$; sie enthält eine Reihe u und x weniger als die Faltung vom Defekt $\lambda-1$ ebenderselben Reihen $(u S^\lambda \,|\, T_\lambda x)$. Wir setzen umgekehrt die Faltung vom Defekt λ aus Grundfaltungen, die das Verschwinden einer Reihe u und x bewirken (Gewichtsabnahme $2(n-1)=2(2\lambda-1)$) und zugleich eine neue Symbolreihe R^λ erzeugen, und aus einer kogredienten Faltung vom Defekt $\lambda-1$ zusammen. Die einfachste Faltung, die das leistet, ist die folgende vom Defekt 1:

$$(s\, T^\lambda \,|\, \sigma\, p_\lambda) = \varepsilon\,(S^{2\lambda-1} \,|\, R_{\lambda-1} p_\lambda) = \varepsilon\,(R^\lambda \,|\, p_\lambda),$$

wo gesetzt ist:

$$R^{\lambda+1} = s\, T^\lambda,\ \ s = S^1,\ \ \sigma = S_1,\ \ R^\lambda \backsim \sigma R_{\lambda-1}.$$

Sie ist nach (65.) und (64.) zusammengesetzt aus den $2\lambda-1$ Grundfaltungen:

(67.) $$T^\lambda S^\lambda, S^{\lambda-1}, \ldots S^1;\quad R^{\lambda+1} S^{\lambda+1}, S^{\lambda+2}, \ldots S^{2\lambda-1}.$$

Eine Faltung vom Defekt $\lambda-1$ ergibt, unter Berücksichtigung von (21.) und (62.):

$$(u S^\lambda \,|\, \sigma R_{\lambda-1} x) = \varepsilon\,(R^{\lambda+1} \,|\, S_\lambda x) = \varepsilon\,(s\, T^\lambda \,|\, S^\lambda x) = \varepsilon\,(S^\lambda \,|\, T_\lambda).$$

Der allgemeine Fall, für zwei Reihen S^ϱ, T^ϱ und beliebiges n, läßt sich nun direkt aus dem speziellen übertragen. An Stelle von (67.) treten die folgenden $2\lambda-1$ Grundfaltungen:

(68.) $$T^{\varrho} S^{\varrho}, S^{\varrho-1}, \ldots S^{\varrho-\lambda+1}; \; R^{\varrho+1} S^{\varrho+1}, S^{\varrho+2}, \ldots S^{\varrho+\lambda-1}.$$

Die erste Hälfte der Faltungen ergibt die Form:

$$(q_{n-\varrho-1} T^{\varrho} | S_{n-\varrho+\lambda-1} p_{\varrho-\lambda}),$$

aus der durch die Substitutionen

$$S_{n-\varrho+\lambda-1} p_{\varrho-\lambda} \rightharpoonup w, \quad T^{\varrho} w = R^{\varrho+1}$$

und Anwendung der zweiten Hälfte der Faltungen hervorgeht:

$$(q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho+\lambda-1} | R_{n-\varrho-1} p_{\varrho}).$$

Substituiert man:

$$q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho+\lambda-1} \rightharpoonup y,$$

so kommt durch eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$:

(69.) $$(q_{n-\varrho-\lambda+1} S^{\varrho} | y R_{n-\varrho-1} p_{\varrho-\lambda+1}).$$

Wir zeigen, daß dies die gesuchte Faltung vom Defekt λ ist. Substituiert man

$$R_{n-\varrho-1} p_{\varrho-\lambda+1} = R_{n-\lambda}$$

und beachtet, daß durch Auflösen von y

$$(q_{n-\varrho-\lambda+1} R^{\lambda} | S_{n-\varrho} y) = \varepsilon (q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho+\lambda-1} | S_{n-\varrho} p'_{\varrho-1}) = 0$$

kommt, so ergibt sich nach (20.) für (69.) der Wert:

$$\varepsilon (S^{\varrho} R^{\lambda} | p_{\varrho+\lambda-1} y) = \varepsilon (q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho+\lambda-1} | [S^{\varrho} R^{\lambda}]_{n-\varrho-\lambda} p_{\varrho+\lambda-1}).$$

Diese Faltung ist aber vom Typus (43.), also äquivalent

$$(q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho} | R_{n-\varrho-1} p_{\varrho-\lambda+1}) = \varepsilon (w T^{\varrho} | R_{\lambda} p_{\varrho-\lambda+1}), \text{ wo } R_{\lambda} \rightharpoonup q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho}.$$

Hier ist R_{λ} schon von der gewünschten Schlußform; der Ausdruck entspricht der Form $(s T^{\lambda} | S_{\lambda} x)$ im Spezialfall. Beachtet man nun, daß durch Auflösen von w und R_{λ} sich ergibt:

$$(w R^{n-\lambda} | T_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda+1}) = \varepsilon (q'_{\lambda-1} R^{n-\lambda} | S_{n-\varrho+\lambda-1} p_{\varrho-\lambda})$$
$$= \varepsilon (q''_{n-\varrho-1} S^{\varrho} | S_{n-\varrho+\lambda-1} p_{\varrho-\lambda}) = 0,$$

so kommt nach (21.) der Wert:

$$(w q_{n-\varrho+\lambda-1} | T_{n-\varrho} R_{\lambda}) = \varepsilon (q_{n-\varrho+\lambda-1} [T_{n-\varrho} R_{\lambda}]^{\varrho-\lambda} | S_{n-\varrho+\lambda-1} p_{\varrho-\lambda})$$
$$\text{äquivalent } (q_{n-\varrho-\lambda} S^{\varrho} | T_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda}).$$

Bei dem ganzen Prozeß war nur die Normalformeigenschaft von S, nicht die von T benutzt; die kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-1$ zur Erzeugung von (69.) läßt sich also ersetzen durch $2\lambda-3$ Grundfaltungen und eine kogrediente Faltung vom Defekt $\lambda-2$, die ihrerseits wieder eine Zerlegung in Grundfaltungen zuläßt usf. Analog ergibt sich die Erzeugung bei Benutzung der Normalformeigenschaft von T und Anwendung des dualistischen Prozesses, d. h. der Grundfaltungen:

$$S^{\varrho} T^{\varrho}, T^{\varrho+1}, \ldots T^{\varrho+\lambda-1}; \; R^{\varrho-1} T^{\varrho-1}, T^{\varrho-2}, \ldots T^{\varrho-\lambda+1},$$

und einer zu (69.) dualistischen Faltung. Es entsteht jetzt die der vorigen äquivalente Faltung $(q_{n-\varrho-\lambda} T^{\varrho} | S_{n-\varrho} p_{\varrho-\lambda})$.

Nimmt man die unter 2) erhaltene Zerlegung hinzu, so hat man in der Tat eine *Erzeugung der allgemeinsten Faltungen aus Grundfaltungen* erhalten. Es bleibt noch nachzuweisen, daß diese Erzeugung, abgesehen von der Vertauschung der Reihenfolge, *eindeutig* ist, d. h., daß jeder Faltung eine und nur eine Zahl α_ϱ von Grundfaltungen vom Typus ϱ, wo $\varrho = 1, 2, \ldots n-1$, zukommt.

Es seien m_ϱ die Gradzahlen in den Variabelnreihen p_ϱ der Ausgangsform f, l_ϱ die Gradzahlen der durch Faltung entstandenen Form. Eine jede Grundfaltung vom Typus ϱ verwandelt die Gradzahlen

$$m_{\varrho-1}, m_\varrho, m_{\varrho+1} \text{ bzw. in } m_{\varrho-1}+1, m_\varrho-2, m_{\varrho+1}+1.$$

Die α genügen also dem Gleichungssystem:

$$(70.) \qquad m_\varrho - l_\varrho = -\alpha_{\varrho-1} + 2\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1}, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n-1)$$

wo α_0 und $\alpha_n = 0$ zu setzen ist und dessen Determinante den Wert n hat*). Es sind dadurch die α also eindeutig bestimmt, und zwar nach Satz VIII als positive ganze Zahlen, was Bedingungen für die Differenzen $m_\varrho - l_\varrho$ ergibt.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten *vermöge der Relationen* (62.); es sind aber nicht etwa in dem Falle, daß die Relationen (62.) nicht gelten, die Schlußausdrücke den Anfangsausdrücken äquivalent. Die in § 6 gegebene Definition der Äquivalenz läßt nämlich auch die Fassung zu**): „Zwei Formen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie sich unterscheiden durch Formen von höherer Faltung, d. h. durch Formen, die eine höhere Gewichtsabnahme aufweisen." Diese höhere Gewichtsabnahme hat stets statt, wenn die beiden in die Faltung eingehenden Reihen $q_{n-\sigma-\lambda}$, $p_{\tau-\lambda}$ wirklich Variabelnreihen sind, wie dies bei (41.), (42.), bei den in diesem Paragraphen als äquivalent auftretenden Faltungen, oder auch bei den äquivalenten Formen des Satz VII der Fall war. Sie braucht aber nicht stattzuhaben, wenn diese Reihen durch Substitution aus Symbolreihen abgeleitet sind, wie dies der Fall war bei den Formen dieses Paragraphen, die vermöge (62.) durch einander ausdrückbar waren. Man sieht

*) Bezeichnet Δ_n die n-reihige Determinante, so gilt die Rekursionsformel: $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$; d. h. $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = \cdots = \Delta_2 - \Delta_1 = 1$, da $\Delta_2 = 3$, $\Delta_1 = 2$.

**) Vgl. dazu die Überlegung am Schlusse des nächsten Paragraphen.

leicht, daß die verschwindenden Formen zum Teil sogar ein höheres Gesamtgewicht aufweisen.

§ 9. *Formenreihen. Reduktionssätze**).

Die in § 6 (Schluß) eingeführte *Formenreihe* definieren wir jetzt etwas schärfer als „die Gesamtheit der in den Koeffizienten linearen invarianten Bildungen einer gegebenen Ausgangsform, d. h. die Gesamtheit der durch Faltung in sich aus der Ausgangsform entstandenen Formen, *in der Anordnung nach höheren Formen*".

Zur Erklärung der höheren Formen sei die Ausgangsform nach Satz VII als Produkt zweier Normalformen $S \cdot T$ gegeben; als *höhere Form* bezeichnen wir dann Formen mit höherer Faltung in sich, unter den Formen mit gleicher Faltung in sich speziell normierte. Genauer ausgedrückt heißt das: Es sei die Form A durch α_ϱ, die Form B durch β_ϱ Grundfaltungen vom Typus ϱ entstanden. B ist höher als A:

1) wenn in dem System von Ungleichungen: $\beta_\varrho \geqq \alpha_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots n-1$, mindestens für einen Wert ϱ das Ungleichheitszeichen gilt**);
2) wenn für alle Werte ϱ das Gleichheitszeichen gilt, aber weniger Symbolreihen zu einem einzigen Matrizenprodukt zusammengefaßt sind. Diese Normierung erweist sich als notwendig wegen der Reduktionen in § 8. Danach wird z. B.: $(S^{n-1} \mid T_{n-1})$ höher als $(S^{n-1} \mid [S^1 T^\varrho]_{n-\varrho-1} p_\varrho)$.
3) Wenn für alle Werte ϱ das Gleichheitszeichen gilt und die Anzahl der zu einem Matrizenprodukt zusammengefaßten Symbolreihen die gleiche ist, wird B höher als A durch eine an sich willkürliche, aber ein für allemal festgelegte Normierung. Diese Normierung ist wegen der endlichen Anzahl der zu einem Wertesystem α gehörenden Formen stets möglich, läßt sich z. B. erreichen durch Auszeichnung der einen Form S (größere Anzahl von Symbolreihen S, höhere Summe der oberen Gewichtsindizes der Reihen S usf.).

---

*) Vgl. die entsprechenden Betrachtungen im ternären Gebiet. Diss. §§ 1—3.

**) Gilt in dem System von Ungleichungen zum Teil das Zeichen $>$, zum Teil das Zeichen $<$, so sind die Formen nicht miteinander vergleichbar, da einer Form, die aus einer anderen durch Faltung hervorgegangen, stets ein positives Wertesystem von Grundfaltungen zukommt, also in unserem Fall positive oder verschwindende Werte $\beta_\varrho - \alpha_\varrho$.

Wir können uns zweckmäßig die Formenreihe als $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Gitterpunkten angeordnet denken, wobei die $n-1$ Richtungen den $n-1$ Grundfaltungen entsprechen. Einer jeden Form ist dann ein und nur ein Wertesystem α, d. h. ein positiv ganzzahliger Gitterpunkt zugeordnet, während die verschiedenen Formen, die zu einem Wertesystem α gehören, durch die obige Normierung in ihrer Anordnung eindeutig bestimmt sind. Eine beliebige Form der Formenreihe gibt die Ausgangsform einer neuen Formenreihe, die als Teil in der Gesamtformenreihe enthalten ist; und zwar als Teil enthalten in denjenigen Formen, die man von der neuen Ausgangsform aus, in den $n-1$ positiven Richtungen fortschreitend, erhält.

Vermöge Satz VIII und der allgemeinen Theorie der Reihenentwicklungen gelten nun für Formenreihen genau die Reduktionssätze des binären und ternären Gebiets (vgl. Diss. § 3), von denen wir den Hauptsatz noch kurz ableiten wollen. Wir schicken die Definition voraus:

„In einem gegebenen System von Formen sei eine gewisse endliche Anzahl von Formen zu einem Modul zusammengefaßt; als *reduzibel* bezeichnen wir eine Form, die sich ausdrücken läßt durch Formen, die Invarianten zum Faktor haben, oder durch „höhere Formen“; d. h. durch höhere Formen der Gesamtformenreihe, der die Form angehört, oder durch Formen, die die Symbole des Moduls in höherer Ordnung enthalten. Eine reduzible Formenreihe nennen wir *Reduzent.*“ Es gilt dann

Satz IX: Ist die Ausgangsform einer Formenreihe reduzibel dadurch, daß sie durch Faltung mit einem Reduzenten hervorgegangen ist, so ist die gesamte, aus dieser Ausgangsform entstehende Formenreihe reduzibel.

Zum Beweise bedenken wir, daß eine durch Faltung einer Form f mit einer zweiten g entstandene Form h sich wegen (45.) auffassen läßt als eine mehrere kogrediente Variabelnreihen p_ϱ, p'_ϱ enthaltende Form f. Solche Formen lassen sich aber nach der allgemeinen Theorie der Reihenentwicklung darstellen als Polaren der Elementarkovarianten von f, dadurch daß man die Reihenentwicklung sukzessive auf je zwei kogrediente Variabelnreihen p_ϱ, p'_ϱ anwendet. Dabei sind nach (38.) die auftretenden Elementarkovarianten die durch kogrediente Faltung erzeugten Formen. Da aber die Reihenfolge in der Anwendung der Reihenentwicklung noch willkürlich ist, können wir insbesondere eine solche Reihenfolge nehmen, die der Erzeugung der allgemeinen Fal-

tungen aus Grundfaltungen entspricht. Das entstehende System von Elementarkovarianten wird dann identisch mit der Formenreihe f; und zwar ordnen sich die durch kogrediente Faltung von höherem Defekt entstandenen Formen in die durch Grundfaltungen entstandenen ein. Zu Polaren der Formenreihe f gelangt man aber auch bei beliebiger Reihenfolge der Reihenentwicklung, der ein zweites System von Elementarkovarianten entsprechen möge. Da nämlich die Formenreihe die Gesamtheit der invarianten Bildungen erschöpft, läßt sich jede Form des zweiten Systems linear ausdrücken durch Polaren der Formenreihe, und zwar Polaren derjenigen Formen, die gleiche oder höhere Gewichtsabnahme zeigen. Dies letztere folgt daraus, daß sich (vgl. § 7) die Polaren auffassen lassen als Simultaninvarianten einer Formenreihe H (52.), mit der Form h entsprechenden Gradzahlen, und der Formenreihe f. Jeder Faltung von H in sich entspricht eine Gewichtsabnahme, die sich nach Vornahme von Substitution (11.) auf die Symbolreihen und damit auf die Formen von f überträgt*).

Eine beliebige Form der Formenreihe h ist entstanden durch Faltung von h in sich; d. h. durch höhere Faltung von g mit f einerseits, durch Faltung von f oder g in sich andererseits. In beiden Fällen führt die Reihenentwicklung, ebenso wie oben bei der Ausgangsform h gezeigt, auf Polaren der Formenreihe f. Ist insbesondere f Reduzent, so ergibt sich eine Entwicklung nach Polaren des Reduzenten; die Formenreihe h wird also reduzibel.

Anwendungen des Satzes auf die Reduktion vollständiger Formensysteme ergeben sich analog wie im binären und ternären Gebiet.

*) Diese Betrachtung liegt auch der zweiten Fassung des Äquivalenzbegriffes (§ 8 Schluß) zugrunde. Weitere Ausführungen über die verschiedenen Systeme von Elementarkovarianten finden sich im ternären Gebiet bei *Study*, a. a. O., II. § 7. Satz 7) und 8). Vermöge unseres Satz VII gelten dieselben auch für n Variable.

Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich die Aufgabe, alle endlichen Gruppen von gebrochenen linearen Substitutionen (Kollineationen) zu bestimmen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe mit n Vertauschungsziffern einstufig isomorph sind. Diese Aufgabe wird so weit gefördert, daß eine genaue Übersicht über die gesuchten Kollineationsgruppen gewonnen wird.

Die symmetrische Gruppe mit n Vertauschungsziffern bezeichne ich im folgenden mit $\mathfrak{S}_n$, die alternierende Gruppe mit $\mathfrak{A}_n$.

Es genügt, unter den zu bestimmenden Kollineationsgruppen nur die *irreduziblen* (nicht zerlegbaren) zu kennen; ferner hat man zwei *äquivalente* Gruppen, d. h. zwei Gruppen, die ineinander linear transformierbar sind, als nicht verschieden anzusehen.

Unter den Gruppen gebrochener linearer Substitutionen, die der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ isomorph sind, nehmen diejenigen eine besondere Stellung ein, die sich auch als Gruppen von $n!$ bzw. $\frac{n!}{2}$ ganzen (homogenen) linearen Substitutionen schreiben lassen. Diese Gruppen hat bereits Herr *Frobenius**) durch Berechnung der Charaktere der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$

*) „Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1900, S. 516; „Über die Charaktere der alternierenden Gruppe", ebenda, 1901, S. 303; „Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe", ebenda, 1903, S. 328. — Auf anderem Wege habe ich die Charaktere der symmetrischen Gruppe in meiner Inaug.-Dissertation „Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen", (Berlin 1901) erhalten.

sämtlich bestimmt*). Eine einfache Methode zur wirklichen Herstellung dieser Gruppen habe ich später angegeben**).

Wir haben uns daher in dieser Arbeit nur mit denjenigen Gruppen zu beschäftigen, bei denen die Benutzung gebrochener linearer Substitutionen wesentlich ist. Eine solche Gruppe bezeichne ich mit $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ oder $\mathfrak{A}_n^{(g)}$, je nachdem sie der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ isomorph ist; entsprechend bezeichne ich die mit $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ isomorphen Gruppen, bei denen die gebrochenen linearen Substitutionen durch homogene lineare Substitutionen ersetzt werden können, mit $\mathfrak{S}_n^{(h)}$ und $\mathfrak{A}_n^{(h)}$.

Für $n<4$ existieren Gruppen $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ überhaupt nicht. Ist aber $n\geqq 4$, so ist, wie ich im folgenden zeige, die Anzahl der verschiedenen (nicht äquivalenten) irreduziblen Gruppen $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ gleich der Anzahl v_n der Zerlegungen

$$n=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \qquad (\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_m>0) \tag{1.}$$

von n in voneinander verschiedene ganzzahlige Summanden, und zwar entspricht einer Zerlegung (1.) eine irreduzible Gruppe $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ des Grades

$$f_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}=2^{\left[\frac{n-m}{2}\right]}\frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_m!}\prod_{\alpha<\beta}\frac{\nu_\alpha-\nu_\beta}{\nu_\alpha+\nu_\beta}.$$

Hierbei bezeichne ich als den *Grad* einer Gruppe gebrochener linearer Substitutionen die um 1 vermehrte Anzahl der Variabeln, also die Anzahl der Variabeln in den zugehörigen homogenen linearen Substitutionen. Für die Zerlegung $n=n$ hat man die Zahl f_n gleich $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ zu setzen. Bei $n=6$ sind die beiden Gruppen der Grade $f_6=4$ und $f_{3,2,1}=4$ als nicht voneinander verschieden anzusehen.

Auf die besonders interessante Gruppe $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ des Grades $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ hat bereits Herr *A. Wiman* in seiner wichtigen Arbeit „Über die Darstellung der symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen als Collineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionszahl“***) hingewiesen, ohne jedoch genauer anzugeben, wie diese Gruppe für ein beliebiges n wirklich

*) Eine kurze Zusammenfassung der *Frobenius*schen Resultate findet man in § 43 dieser Arbeit.

**) „Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen“, Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1908, S. 664.

***) Math. Annalen, Bd. 52, S. 243.

herzustellen ist. Im Abschnitt VI gebe ich ein relativ einfaches Verfahren zur Bildung dieser Gruppe an.

Bei der Betrachtung der alternierenden Gruppe hat man folgendes zu beachten: Die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ besitzt einen äußeren Automorphismus $A=\binom{P}{P'}$, wo P' aus P dadurch hervorgeht, daß man in den Zykeln der Permutation P zwei feste Ziffern, etwa die Ziffern 1 und 2 vertauscht. Aus jeder mit $\mathfrak{A}_n$ isomorphen Kollineationsgruppe $\mathfrak{K}$ erhält man daher eine zweite Gruppe $\mathfrak{K}'$ derselben Art, indem man für jede Permutation P von $\mathfrak{A}_n$ die zu P gehörende Kollineation von $\mathfrak{K}$ durch die zu P' gehörende ersetzt. Im folgenden bezeichne ich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ als *adjungierte* Gruppen.

Sieht man nun zwei adjungierte Gruppen auch dann, wenn sie nicht einander äquivalent sind, als nicht verschieden an, so wird die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Gruppen $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ für $n=4$ gleich Eins und für $n>4$, wie bei der symmetrischen Gruppe, gleich v_n. Die der Zerlegung (1.) entsprechende irreduzible Gruppe $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ ist, wenn $n-m$ ungerade ist, gleich $f_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n}$, und wenn $n-m$ gerade ist, gleich $\frac{1}{2}f_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}$. Diese allgemeinen Regeln erleiden jedoch eine Ausnahme für die beiden Fälle $n=6$ und $n=7$. Für $n=6$ sind zunächst von den $v_6=4$ eben erwähnten Gruppen $\mathfrak{A}_6^{(g)}$, deren Grade gleich $4, 4, 8, 20$ sind, die beiden Gruppen des Grades 4, wie bei der Gruppe $\mathfrak{S}_6$, als identisch anzusehen; außer den übrigbleibenden drei Gruppen gibt es aber noch sechs andere wesentlich verschiedene*) irreduzible Gruppen $\mathfrak{A}_6^{(g)}$ der Grade $3, 6, 6, 9, 12, 15$. Für $n=7$ kommen zu den $v_7=5$ dem allgemeinen Fall entsprechenden Gruppen $\mathfrak{A}_7^{(g)}$ noch elf andere irreduzible Gruppen der Grade $6, 6, 15, 15, 21, 21, 24, 24, 24, 24, 36$ hinzu.

Jede Gruppe $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ läßt sich als Gruppe von $2\cdot n!$ bzw. $2\cdot\frac{n!}{2}$ homogenen linearen Substitutionen schreiben. Diese Regel versagt nur für die beiden alternierenden Gruppen $\mathfrak{A}_6$ und $\mathfrak{A}_7$; hier kann die Mindestanzahl von homogenen linearen Substitutionen, in denen eine Gruppe $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ $(n=6,7)$ geschrieben werden kann, auch gleich $3\cdot\frac{n!}{2}$ oder $6\cdot\frac{n!}{2}$ sein. Hierdurch erklärt sich das Auftreten der als Ausnahmefälle genannten Gruppen $\mathfrak{A}_6^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_7^{(g)}$.

---

*) Hierbei werden zwei Gruppen mit konjugiert komplexen Koeffizienten als nicht voneinander verschieden betrachtet.

Besonders bemerkenswert ist das Vorhandensein zweier wesentlich verschiedener Gruppen $\mathfrak{A}_7^{(g)}$ des Grades 6, zu denen noch eine Gruppe $\mathfrak{A}_7^{(h)}$ desselben Grades hinzukommt. Die beiden Gruppen $\mathfrak{A}_7^{(g)}$ unterscheiden sich in erster Linie dadurch, daß die eine als Gruppe von $3 \cdot \frac{7!}{2}$, die andere erst als Gruppe von $6 \cdot \frac{7!}{2}$ homogenen linearen Substitutionen geschrieben werden kann. Diese beiden Gruppen hat Herr *Wiman**) bei der Untersuchung der mit der Gruppe $\mathfrak{A}_7$ isomorphen Kollineationsgruppen sechsten Grades übersehen.

Von den im vorstehenden aufgezählten Gruppen $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ waren bis jetzt, abgesehen von der in der Arbeit des Herrn *Wiman* erwähnten Gruppe $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ des Grades $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ und der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{A}_n^{(g)}$ des Grades $2^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}$, nur die binären, ternären und quaternären Gruppen bekannt. Die binären Gruppen $\mathfrak{A}_4^{(g)}$, $\mathfrak{S}_4^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_5^{(g)}$ finden sich zuerst in geometrischer Einkleidung in der Arbeit des Herrn *H. A. Schwarz* „Über diejenigen Fälle, in welchen die *Gauß*ische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt“**). Unabhängig hiervon hat diese drei Gruppen Herr *F. Klein* in seiner Arbeit „Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst“***) aufgestellt und zugleich den Nachweis geführt, daß dies, abgesehen von zwei trivialen Fällen, die einzigen endlichen binären Substitutionsgruppen sind. Die Existenz einer ternären Gruppe $\mathfrak{A}_6^{(g)}$ hat zuerst Herr *Wiman*†) nachgewiesen, indem er gezeigt hat, daß eine schon früher von Herrn *Valentiner*††) aufgestellte ternäre Kollineationsgruppe mit der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ isomorph ist. Unter den (irreduziblen) quaternären Kollineationsgruppen gibt es je eine Gruppe $\mathfrak{S}_4^{(g)}, \mathfrak{S}_6^{(g)}, \mathfrak{A}_6^{(g)}, \mathfrak{A}_7^{(g)}$ und je zwei Gruppen $\mathfrak{S}_5^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_5^{(g)}$. Die Gruppen $\mathfrak{S}_6^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_7^{(g)}$ hat zuerst Herr *F. Klein*†††) durch Betrachtungen aus der Liniengeomtrie gewonnen; jede dieser Gruppen enthält die Gruppe $\mathfrak{A}_6^{(g)}$ und je eine von den Gruppen $\mathfrak{S}_5^{(g)}$ und $\mathfrak{A}_5^{(g)}$ als Untergruppen. Die Aufzählung aller

---

*) a. a. O., S. 259 ff.

**) Dieses Journal, Bd. 75, S. 292.

***) Math. Annalen, Bd. 9, S. 183.

†) Math. Annalen, Bd. 47, S. 531.

††) Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6. Raekke, Kopenhagen 1889, S. 64.

†††) Math. Annalen, Bd. 28, S. 499.

ternären und quaternären Kollineationsgruppen, die einer symmetrischen oder alternierenden Gruppe isomorph sind, hat *H. Maschke**) durchgeführt.

Im folgenden bediene ich mich der Methoden, die ich in meiner Arbeit „Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen“**) auseinandergesetzt habe. Um eine genaue Übersicht über alle Gruppen $\mathfrak{S}_n^{(\varrho)}$ und $\mathfrak{A}_n^{(\varrho)}$ zu erhalten, hat man nur die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ aufzustellen und die *Frobenius*schen Charaktere dieser Gruppen zu berechnen.

Die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ besitzt für $n \geqq 4$ zwei Darstellungsgruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ derselben Ordnung $2 \cdot n!$, die nur für $n = 6$ einander isomorph sind. Jede dieser Gruppen hat eine invariante Untergruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung 2, die in dem Kommutator der Gruppe enthalten ist, und die Gruppen $\frac{\mathfrak{T}_n}{\mathfrak{M}}$ und $\frac{\mathfrak{T}_n'}{\mathfrak{M}}$ sind der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ (einstufig) isomorph; $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ unterscheiden sich dadurch, daß den Transpositionen von $\mathfrak{S}_n$ in $\mathfrak{T}_n$ Elemente der Ordnung 4, dagegen in $\mathfrak{T}_n'$ Elemente der Ordnung 2 entsprechen. Beide Gruppen lassen sich leicht auseinander ableiten; ich beschäftige mich im folgenden nur mit der Gruppe $\mathfrak{T}_n$.

Die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{A}_n$ ist eindeutig bestimmt. Ist $n \geqq 4$, aber von 6 und 7 verschieden, so ist dies eine Gruppe $\mathfrak{B}_n$ der Ordnung $2 \cdot \frac{n!}{2}$, die in jeder der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ als Untergruppe enthalten ist. Dagegen sind die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{A}_6$ und $\mathfrak{A}_7$ von den Ordnungen $6 \cdot \frac{6!}{2}$ und $6 \cdot \frac{7!}{2}$.

Die Bestimmung der Darstellungsgruppen von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ gelingt verhältnismäßig leicht mit Hilfe eines von Herrn *E. H. Moore* herrührenden Satzes über die Definition von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ als abstrakte endliche Gruppen, der auch in den erwähnten Arbeiten von Herrn *Wiman* und *H. Maschke* eine wichtige Rolle spielt***). Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Berechnung der Charaktere dieser Darstellungsgruppen; hierzu war insbeson-

*) Math. Annalen Bd. 51, S. 251.

**) Dieses Journal, Bd. 127, S. 20. Vgl. auch meine Arbeit „Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen“, ebenda, Bd. 132, S. 85. — Im folgenden zitiere ich die erste Arbeit mit D., die zweite mit U.

***) Auf anderem Wege hat Herr *de Séguier* (Comptes Rendus de l'acad. des sciences, Paris, T. 150 (1910), S. 599) die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ bestimmt. Bei der alternierenden Gruppe hat Herr *de Séguier* jedoch den wichtigen Ausnahmefall $n = 7$ übersehen.

dere ein genaueres Studium der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ erforderlich, die zwar mit der symmetrischen Gruppe aufs engste verwandt, aber von wesentlich komplizierterem Aufbau ist. Die Lösung der Aufgabe gelingt mir zuletzt durch Einführung einer Klasse von symmetrischen Funktionen, die auch an und für sich von Interesse sind (Abschnitt IX).

Abschnitt I.

Die Darstellungsgruppen der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$.

§. 1. Um das Verständnis des folgenden zu erleichtern, schicke ich einige Bemerkungen über die hier zur Anwendung kommenden Bezeichnungen voraus*).

Es sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h. Ordnet man den Elementen $A, B, \ldots$ von $\mathfrak{H}$ die h linearen Substitutionen (Kollineationen) von nicht verschwindenden Determinanten

$$|A| \qquad x_\mu = \frac{a_{\mu 1} y_1 + \cdots + a_{\mu, m-1} y_{m-1} + a_{\mu m}}{a_{m1} y_1 + \cdots + a_{m, m-1} y_{m-1} + a_{mm}}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m-1)$$

$$|B| \qquad x_\mu = \frac{b_{\mu 1} y_1 + \cdots + b_{\mu, m-1} y_{m-1} + b_{\mu m}}{b_{n 1} y_1 + \cdots + b_{m, m-1} y_{m-1} + b_{mm}}, \quad \ldots$$

zu, so bilden diese Substitutionen eine *Darstellung* (des Grades m) von $\mathfrak{H}$, wenn für je zwei Elemente A, B der Gruppe das Produkt $|A|\,|B|$ gleich wird der Substitution $|AB|$, die dem Produkt AB der beiden Elemente A und B entspricht. Hierbei brauchen die h Substitutionen $|A|, |B|, \ldots$ nicht sämtlich voneinander verschieden zu sein. Bezeichnet man die Koeffizientenmatrizen $(a_{\lambda\mu}), (b_{\lambda\mu}), \ldots$ mit $(A), (B), \ldots$, so besteht für je zwei Elemente A, B der Gruppe eine Gleichung

$$(2.) \qquad (A)\,(B) = r_{A,B}(AB),$$

wo $r_{A,B}$ eine gewisse Konstante bedeutet. Umgekehrt entspricht jedem System von h Matrizen $(A), (B), \ldots$, deren Determinanten nicht Null sind, und welche die Eigenschaft besitzen, daß für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{H}$ eine Gleichung der Form (2.) besteht, eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen.

Jede der Matrizen $(A), (B), \ldots$, die den Substitutionen $|A|, |B|, \ldots$ entsprechen, ist nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Lassen sich diese Faktoren so wählen, daß die Zahlen $r_{A,B}$ sämtlich gleich Eins wer-

*) Vgl. D., Einleitung.

den, so bilden die Matrizen $(A),(B),\ldots$ selbst eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}$, die sich auch als eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch die *ganzen* homogenen linearen Substitutionen

$$(A) \qquad x_\mu = a_{\mu 1} y_1 + a_{\mu 2} y_2 + \cdots + a_{\mu m} y_m,$$

$$(B) \qquad x_\mu = b_{\mu 1} y_1 + b_{\mu 2} y_2 + \cdots + b_{\mu m} y_m, \quad \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

auffassen läßt.

Zwei Darstellungen einer Gruppe durch ganze oder gebrochene lineare Substitutionen sind *äquivalent*, wenn sich die eine Darstellung in die andere durch eine ganze bzw. gebrochene lineare Transformation der Variabeln von nicht verschwindender Determinante überführen läßt. Eine Darstellung m-ten Grades durch ganze oder gebrochene lineare Substitutionen heißt ferner *irreduzibel*, wenn sich für keine ihr äquivalente Darstellung eine Zahl $k<m$ angeben läßt, so daß unter den Koeffizienten $a_{\lambda\mu}, b_{\lambda\mu}, \ldots$ ihrer Substitutionen diejenigen Null werden, bei denen $\lambda \leqq k$ und $\mu > k$ oder $\lambda > k$ und $\mu \leqq k$ ist.

Eine endliche Gruppe $\mathfrak{K}$, die eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{K}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{M}$ von der Art enthält, daß die Gruppe $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ einstufig isomorph wird, nenne ich *eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$*. Es möge, wenn

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}A' + \mathfrak{M}B' + \cdots$$

ist, dem Element A von $\mathfrak{H}$ der Komplex $\mathfrak{M}A'$, dem Element B der Komplex $\mathfrak{M}B'$, usw., entsprechen. Man habe ferner irgendeine Darstellung Δ' der Gruppe $\mathfrak{K}$ durch homogene lineare Substitutionen (Matrizen), bei der jedem Element der Untergruppe $\mathfrak{M}$ eine Matrix entspricht, die sich von der Einheitsmatrix nur um einen Zahlenfaktor unterscheidet*). Sind dann bei dieser Darstellung den Elementen $A', B', \ldots$ die Matrizen $(A),(B),\ldots$ zugeordnet, so bestehen für diese Matrizen Gleichungen der Form (2.). Daher gehört zu jeder solchen Darstellung Δ' von $\mathfrak{K}$ durch homogene lineare Substitutionen eine Darstellung Δ der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen.

Die Gruppe $\mathfrak{K}$ läßt sich stets so wählen, daß auf diese Weise *alle* Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen erhalten werden können. Eine Gruppe $\mathfrak{K}$, die diese Eigenschaft besitzt, nenne ich *eine*

*) Diese Bedingung ist für eine irreduzible Darstellung von selbst erfüllt.

hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$. Wird die Ordnung einer solchen Gruppe möglichst klein, so bezeichne ich sie als eine *Darstellungsgruppe von* $\mathfrak{H}$. Kennt man also eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$, so erhält man alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen, indem man alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{K}$ durch homogene lineare Substitutionen bestimmt.

Eine hinreichend ergänzte Gruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ ist *stets und nur dann eine Darstellungsgruppe, wenn der Kommutator von* $\mathfrak{K}$ *alle Elemente der Untergruppe* $\mathfrak{M}$ *enthält.* Der Kommutator jeder Darstellungsgruppe ist ferner als abstrakte Gruppe allein durch die Gruppe $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für die Untergruppe $\mathfrak{M}$, die ich als den *Multiplikator* der Gruppe $\mathfrak{H}$ bezeichne. Eine Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Multiplikator die Ordnung Eins hat, nenne ich eine *abgeschlossene* Gruppe.

§ 2. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ läßt sich durch die $n-1$ Transpositionen

$$S_1=(1,2),\ S_2=(2,3),\ \ldots\ S_{n-1}=(n-1,n)$$

erzeugen. Diese Transpositionen genügen den Gleichungen

$$\text{(I.)}\qquad S_\alpha^2=E,\ (S_\beta S_{\beta+1})^3=E,\ S_\gamma S_\delta=S_\delta S_\gamma, \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,2,\ldots n-1,\ \beta=1,2,\ldots n-2\\ \gamma=1,2,\ldots n-3,\ \delta=\gamma+2,\ldots n-1\end{pmatrix}$$

und es gilt, wie Herr *E. H. Moore**) bewiesen hat, der Satz:

„*Faßt man die Gleichungen* (I.) *als ein System von definierenden Relationen zwischen den* $n-1$ *erzeugenden Elementen* $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$ *auf, so ist die hierdurch definierte abstrakte Gruppe endlich und der Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *einstufig isomorph*".

Man habe nun irgendeine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch Kollineationen. Der Transposition S_α möge hierbei eine Kollineation mit der Koeffizientenmatrix A_α entsprechen; dann ist A_α also nur bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt. Wegen der Relationen (I.) bestehen für die A_α Gleichungen der Form

$$\text{(3.)}\qquad A_\alpha^2=a_\alpha E,$$

$$\text{(4.)}\qquad (A_\beta A_{\beta+1})^3=b_\beta E,$$

$$\text{(5.)}\qquad A_\gamma A_\delta=c_{\gamma\delta}A_\delta A_\gamma,$$

wo E die Einheitsmatrix ist, und $a_\alpha, b_\beta, c_{\gamma\delta}$ gewisse von Null verschiedene Konstanten bedeuten. Die Zahlen $c_{\gamma\delta}$ treten nur für $n>3$ auf, sie bleiben

*) Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 28 (1897), S. 357.

offenbar ungeändert, wenn die Matrizen A_a mit beliebigen Konstanten multipliziert werden, und sind also allein durch die betrachteten Kollineationen bestimmt.

Aus (5.) folgt

$$A_\gamma A_\delta A_\gamma^{-1} = c_{\gamma\delta} A_\delta .$$

Erhebt man auf beiden Seiten in die zweite Potenz, so ergibt sich wegen (3.)

(6.) $$c_{\gamma\delta}^2 = 1.$$

Nun sind in $S_\gamma = (\gamma, \gamma+1)$, $S_\delta = (\delta, \delta+1)$ wegen $\delta \geqq \gamma+2$ die Ziffern $\gamma, \gamma+1, \delta, \delta+1$ voneinander verschieden. Sind weiter γ' und δ' zwei andere Indizes und ist wieder $\delta' \geqq \gamma'+2$, so läßt sich in $\mathfrak{S}_n$ eine Permutation S angeben, welche die Indizes $\gamma, \gamma+1, \delta, \delta+1$ in die Indizes $\gamma', \gamma'+1$, $\delta', \delta'+1$ überführt. Es wird dann

$$S^{-1} S_\gamma S = S_{\gamma'}, \quad S^{-1} S_\delta S = S_{\delta'} .$$

Entsprechend wird, wenn bei unserer Darstellung der Permutation S eine Kollineation mit der Koeffizientenmatrix A zugeordnet ist,

$$A^{-1} A_\gamma A = c\, A_{\gamma'}, \quad A^{-1} A_\delta A = d\, A_{\delta'},$$

wo c und d gewisse von Null verschiedene Konstanten sind. Aus der Gleichung (5.) folgt nun

$$A^{-1} A_\gamma A \cdot A^{-1} A_\delta A = c_{\gamma\delta} A^{-1} A_\delta A \cdot A^{-1} A_\gamma A ,$$

also

$$cd \cdot A_{\gamma'} A_{\delta'} = cd\, c_{\gamma\delta} A_{\delta'} A_{\gamma'} = cd\, c_{\gamma'\delta'} A_{\delta'} A_{\gamma'} .$$

Hieraus ergibt sich aber $c_{\gamma\delta} = c_{\gamma'\delta'}$, d. h. *alle Zahlen* $c_{\gamma\delta}$ *sind einander gleich.* Setzen wir

$$c_{\gamma\delta} = j,$$

so wird wegen (6.)

(7.) $$j = \pm 1.$$

Aus den Gleichungen (4.) folgt weiter

$$A_\beta A_{\beta+1} A_\beta = b_\beta A_{\beta+1}^{-1} A_\beta^{-1} A_{\beta+1}^{-1} .$$

Durch Erheben in die zweite Potenz erhält man leicht

(8.) $$b_\beta^2 = a_\beta^3 a_{\beta+1}^3 .$$

Da wir nun die Matrizen A_a mit beliebigen Konstanten multiplizieren dürfen, so können wir die Größen a_a beliebig fixieren. Man setze zunächst

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = j .$$

Dann wird wegen (7.) und (8.) $b_\beta = \pm 1$, und definiert man die Matrizen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$B_1 = A_1,\ B_2 = jb_1 \cdot A_2,\ B_3 = b_1 b_2 \cdot A_3,\ B_4 = jb_1 b_2 b_3 \cdot A_4, \ldots,$$

so genügen sie, wie man leicht erkennt, den Relationen

$$B_\alpha^2 = jE,\ (B_\beta B_{\beta+1})^3 = jE,\ B_\gamma B_\delta = j \cdot B_\delta B_\gamma.$$

Setzt man andererseits

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$$

und

$$C_1 = A_1,\ C_2 = b_1 \cdot A_1,\ C_3 = b_1 b_2 \cdot A_3,\ C_4 = b_1 b_2 b_3 \cdot A_4, \ldots,$$

so erhält man

$$C_\alpha^2 = E,\ (C_\beta C_{\beta+1})^3 = E,\ C_\gamma C_\delta = j \cdot C_\delta C_\gamma.$$

Ist nun $j = 1$, so werden die Relationen (I.) erfüllt, wenn man S_α durch $B_\alpha = C_\alpha$ ersetzt. Auf Grund des *Moore*schen Satzes ergibt sich daher, daß für $j = 1$ in unserer Darstellung die gebrochenen linearen Substitutionen durch homogene lineare Substitutionen ersetzt werden können. Dagegen ist dies gewiß nicht der Fall, wenn $j = -1$ ist. Für $n < 4$ kommt ferner die letztere Möglichkeit überhaupt nicht in Betracht.

§ 3. Es ist nun leicht, die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{S}_n$ zu bestimmen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}_n$ die abstrakte endliche Gruppe, die durch das System der definierenden Relationen

(II.) $J^2 = E,\ T_\alpha^2 = J,\ (T_\beta T_{\beta+1})^3 = J,\ T_\gamma T_\delta = J T_\delta T_\gamma$ $\begin{pmatrix}\alpha = 1,2,\ldots n-1, \beta = 1,2,\ldots n-2\\ \gamma = 1,2,\ldots n-3, \delta = \gamma+2, \ldots n-1\end{pmatrix}$

zwischen den erzeugenden Elementen $J, T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ bestimmt ist. Ebenso sei $\mathfrak{T}_n'$ die durch die Relationen

(II′.) $J^2 = E,\ T_\alpha'^2 = E,\ (T_\beta' T_{\beta+1}')^3 = E,\ T_\gamma' T_\delta' = J T_\delta' T_\gamma',\ J T_\alpha' = T_\alpha' J$

zwischen den erzeugenden Elementen $J, T_1', T_2', \ldots T_n'$ definierte Gruppe. In jeder der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ ist J als invariantes Element enthalten, und bezeichnet man mit $\mathfrak{M}$ die Gruppe

$$\mathfrak{M} = E + J,$$

so werden die Gruppen $\frac{\mathfrak{T}_n}{\mathfrak{M}}$ und $\frac{\mathfrak{T}_n'}{\mathfrak{M}}$, wie ein Vergleichen der Formeln (II.) und (II′.) mit den Formeln (I.) lehrt, der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ einstufig isomorph. Die Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ erscheinen also als zwei durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppen von $\mathfrak{S}_n$. Nun werden aber die Gleichungen (II.) befriedigt, wenn man das Element J durch die Matrix $j \cdot E$ und die Elemente T_α durch die Matrizen B_α ersetzt; ebenso werden die Gleichungen (II′.) erfüllt, wenn man für die Elemente J und T_α' die Matrizen $j \cdot E$ und C_α einsetzt. Aus jeder Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch gebrochene lineare Substitutionen geht daher sowohl eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, als auch

eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{T}'_n$ durch *ganze* lineare Substitutionen hervor. Folglich sind $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ als hinreichend ergänzte Gruppen von $\mathfrak{S}_n$ zu bezeichnen. Da ferner für $n \geqq 4$ wegen

$$J = T_1 T_3 T_1^{-1} T_3^{-1}, \quad J = T'_1 T'_3 T'^{-1}_1 T'^{-1}_3$$

das Element J in dem Kommutator von $\mathfrak{T}_n$, bzw. $\mathfrak{T}'_n$ enthalten ist, *so sind für* $n \geqq 4$ *die Gruppen* $\mathfrak{T}_n$ *und* $\mathfrak{T}'_n$ *Darstellungsgruppen von* $\mathfrak{S}_n$*; der Multiplikator der Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *ist also für* $n \geqq 4$ *von der Ordnung* 2*).

Man beachte noch, daß der Kommutator von $\mathfrak{S}_n$ die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist. Da der Index dieser Untergruppe gleich 2, also (für $n \geqq 4$) gleich der Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{S}_n$ ist, so ergibt sich (vgl. U., § 1), daß die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ höchstens zwei einander nicht isomorphe Darstellungsgruppen besitzen kann. Wendet man aber das a. a. O. für den allgemeinen Fall einer endlichen Gruppe angegebene Verfahren an, um etwa von der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ ausgehend zu einer zweiten Darstellungsgruppe von $\mathfrak{S}_n$ zu gelangen, so wird man gerade auf die Gruppe $\mathfrak{T}'_n$ geführt. Ist nun $n \neq 6$, so ist $\mathfrak{S}_n$ eine vollkommene Gruppe**), daher sind für $n \neq 6$ die Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ einander nicht isomorph***). Diese beiden Gruppen unterscheiden sich dadurch, daß den Transpositionen von $\mathfrak{S}_n$ in $\mathfrak{T}_n$ Elemente der Ordnung 4, dagegen in $\mathfrak{T}'_n$ Elemente der Ordnung 2 entsprechen.

Hieraus folgt auch leicht, daß $\mathfrak{T}_6$ und $\mathfrak{T}'_6$ isomorphe Gruppen sind. Denn die Gruppe $\mathfrak{S}_6$ besitzt bekanntlich einen äußeren Automorphismus, durch den jeder Transposition eine Permutation der Form $(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\eta)$ zugeordnet wird. Diesen Permutationen entsprechen aber in $\mathfrak{T}_6$ Elemente der Ordnung 2, wie man durch Betrachtung der zu der Permutation (1 2) (3 4) (5 6) gehörenden Elemente $T_1 T_3 T_5$ und $J T_1 T_3 T_5$ sofort erkennt†).

Wir können folgenden Satz aussprechen:

---

*) Es wäre eigentlich noch zu beweisen, daß sich aus den Relationen (II.) oder (II′.) nicht etwa $J = E$ ergeben kann. Daß dies nicht der Fall ist, folgt aber daraus, daß diese Relationen, wie wir im vierten Abschnitt sehen werden, sich durch Matrizen in der Weise befriedigen lassen, daß an Stelle von E und J zwei verschiedene Matrizen treten.

**) Vgl. *O. Hölder*, „Bildung zusammengesetzter Gruppen", Math. Ann., Bd. 46, S. 321.

***) Vgl. U., S. 122.

†) Daß $\mathfrak{T}_6$ und $\mathfrak{T}'_6$ einander isomorph sind, kann man auch direkt einsehen, indem man zeigt, daß die Elemente

I. *Die Gruppen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ sind abgeschlossene Gruppen. Ist aber $n>3$, so besitzt die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ zwei Darstellungsgruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ derselben Ordnung $2\cdot n!$, die als abstrakte Gruppen durch die Relationen* (II.), *bzw.* (II'.) *definiert werden können. Nur für $n=6$ sind $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ isomorphe Gruppen.*

§ 4. Ich wende mich nun zur Betrachtung der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

Diese Gruppe wird erzeugt durch die $n-2$ Permutationen

$$A_1=S_2S_1=(1\,2\,3),\ A_2=S_3S_1=(1\,2)\,(3\,4),\ \ldots\ A_{n-2}=S_{n-1}S_1=(1\,2)\,(n-1,n),$$

die den Gleichungen

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} A_1^3=E,\ (A_1A_2)^3=E,\ (A_1A_\lambda)^2=E & (\lambda=3,4,\ldots n-2)\\ A_\alpha^2=E,\ (A_\beta A_{\beta+1})^3=E,\ A_\gamma A_\delta=A_\delta A_\gamma & \left(\begin{smallmatrix}\alpha=2,3,\ldots n-2,\ \beta=2,3,\ldots n-3\\ \gamma=2,3,\ldots n-4,\ \delta=\gamma+2,\ldots n-2\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

genügen. *Durch diese Relationen wird wieder die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ als abstrakte Gruppe eindeutig definiert*).*

Es sei wieder irgendeine Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ durch Kollineationen gegeben. Entspricht hierbei der Permutation A_ν eine Kollineation mit der Koeffizientenmatrix P_ν, so ist P_ν nur bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt, und es bestehen wegen (III.) Gleichungen der Form

$$\text{(9.)}\qquad P_1^3=a_1E,\ (P_1P_2)^3=b_1E,\ (P_1P_\lambda)^2=c_\lambda E,$$

$$\text{(10.)}\qquad P_\alpha^2=a_\alpha E,\ (P_\beta P_{\beta+1})^3=b_\beta E,\ P_\gamma P_\delta=c_{\gamma\delta}P_\delta P_\gamma.$$

Die Gleichungen (10.) sind den Gleichungen (3.), (4.) und (5.) des § 2 völlig analog. Wir schließen wie dort, daß

$$\text{(11.)}\qquad c_{\gamma\delta}=c_{24}=\pm1,\ b_\beta^2=a_\beta^3a_{\beta+1}^3$$

ist. Ferner erhält man aus (9.)

$$(P_2P_1^2)^3=(a_2a_1P_2^{-1}P_1^{-1})^3=a_2^3a_1^3b_1^{-1}\cdot E$$

und

$$P_1P_2P_1=b_1\cdot P_2^{-1}P_1^{-1}P_2^{-1}=b_1a_2^{-1}\cdot P_2^{-1}P_1^{-1}P_2.$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Erheben in die dritte Potenz

$$P_1P_2P_1^2P_2P_1^2P_2P_1=P_1(P_2P_1^2)^3P_1^{-1}=b_1^3a_2^{-3}(P_2^{-1}P_1^{-1}P_2)^3.$$

$$T_1=T'_1T'_3T'_5,\ T_2=T'_3T'_2T'_1T'_4T'_3T'_2T'_5T'_4T'_3,\ T_3=T'_1T'_4T'_3T'_5T'_4,$$
$$T_4=T'_1T'_2T'_1T'_3T'_2T'_1T'_5,\ T_5=T'_1T'_3T'_4T'_3T'_5T'_4T'_3$$

von $\mathfrak{T}'_6$ den die Gruppe $\mathfrak{T}_6$ definierenden Relationen genügen.

*) *E. H. Moore*, a. a. O. — Die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ läßt sich, wie man mit Hilfe des *Moore*schen Satzes leicht zeigt, noch eleganter durch die Relationen

$$C_\alpha^3=E,\ (C_\alpha C_\beta)^2=E \qquad (\alpha,\beta=1,2,\ldots n-2,\ \beta>\alpha)$$

definieren. Doch ist diese Definition von $\mathfrak{A}_n$ für unsere Zwecke weniger geeignet.

Daher wird

$$a_2^3 a_1^3 b_1^{-1} = b_1^3 a_2^{-3} a_1^{-1}, \text{ also } b_1^4 = a_1^4 a_2^6.$$

Setzt man demnach

$$j = \frac{b_1^2}{a_1^2 a_2^3}, \tag{12.}$$

so wird $j = \pm 1$.

Aus $(P_1 P_\lambda)^2 = c_\lambda E$ erhält man ferner

$$P_\lambda P_1 P_\lambda = a_\lambda P_\lambda^{-1} P_1 P_\lambda = c_\lambda P_1^{-1}$$

und, indem man zu den dritten Potenzen übergeht,

$$a_\lambda^3 a_1 = c_\lambda^3 a_1^{-1},$$

also

$$c_\lambda^3 = a_1^2 a_\lambda^3. \tag{13.}$$

Ist nun $n \geqq 6$ und setzt man

$$k = j \frac{a_3 c_4}{c_3 a_4},$$

so wird wegen (13.)

$$k^3 = j = \pm 1.$$

Außerdem erhält man aus den Gleichungen

$$(P_1 P_4)^2 = c_4 E, \quad P_2 P_4 = c_{24} P_4 P_2,$$

wie man leicht sieht, die Gleichung

$$P_4 P_1 P_2 = c_4 c_{24} P_1^{-1} P_2 P_4^{-1}$$

oder

$$P_4 P_1 P_2 P_4^{-1} = c_4 a_2 a_4^{-1} c_{24} \cdot P_1^{-1} P_2^{-1}.$$

Hieraus folgt, indem man auf beiden Seiten die dritte Potenz bildet,

$$b_1 = c_4^3 a_2^3 a_4^{-3} c_{24}^3 b_1^{-1}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (11.), (12.) und (13.) schließt man hieraus, daß $c_{24} = j$ ist; daher ist auch allgemein

$$c_{\gamma\delta} = j.$$

Ist n auch $\geqq 7$, so beachte man noch die Gleichungen

$$(P_1 P_\mu)^2 = c_\mu, \quad P_3 P_\mu = j \cdot P_\mu P_3. \qquad (\mu \geqq 5)$$

Es ergibt sich hieraus

$$P_3 P_1 P_\mu = c_3 \cdot P_1^{-1} P_3^{-1} P_\mu = j c_3 \cdot P_1^{-1} P_\mu P_3^{-1},$$

also

$$P_3 P_1 P_\mu P_3^{-1} = j c_3 a_\mu a_3^{-1} \cdot P_1^{-1} P_\mu^{-1}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten in die zweite Potenz, so erhält man

$$c_\mu = c_3^2 a_\mu^2 a_3^{-2} c_\mu^{-1},$$

also

$$c_\mu^2 a_\mu^{-2} = c_3^2 a_3^{-2}.$$

Da aber andererseits wegen (13.)

$$c_\mu^3 a_\mu^{-3} = c_3^3 a_3^{-3}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{c_3}{a_3} = \frac{c_5}{a_5} = \frac{c_6}{a_6} = \cdots = \frac{c_{n-2}}{a_{n-2}}.$$

Ebenso ergibt sich für $n > 7$

$$\frac{c_4}{a_4} = \frac{c_6}{a_6} = \frac{c_7}{a_7} = \cdots = \frac{c_{n-2}}{a_{n-2}}.$$

Daher wird für $n > 7$

$$\frac{c_3}{a_3} = \frac{c_4}{a_4} = \frac{c_5}{a_5} = \cdots = \frac{c_{n-2}}{a_{n-2}}.$$

Insbesondere ergibt sich für $n > 7$

$$k = j = \pm 1.$$

Man erkennt leicht, daß die hier eingeführten Größen j und k, die durch die Gleichung $k^3 = j$ verbunden sind, ungeändert bleiben, wenn die Matrizen $P_1, P_2, \ldots P_{n-2}$ mit beliebigen Konstanten multipliziert werden, *sie sind also allein durch die zu betrachtenden Kollineationen bestimmt.* Die Größe k tritt nur auf, wenn $n > 5$ ist, und wird für $n > 7$ gleich j. Also ist k nur für die beiden Fälle $n = 6$ und $n = 7$ von wesentlicher Bedeutung. *Wir werden auch später sehen, daß sich Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{A}_6$ und $\mathfrak{A}_7$ angeben lassen, bei denen k eine primitive sechste Einheitswurzel wird.*

Um auf einfachere Formeln geführt zu werden, setzen wir zunächst für $n = 4$

$$Q_1 = \sqrt[3]{\frac{j}{a_1}} \cdot P_1, \quad Q_2 = j \cdot \frac{a_1 a_2}{b_1} \cdot P_2.$$

Dann wird

$$(14.) \qquad Q_1^3 = jE, \quad (Q_1 Q_2)^3 = jE.$$

Ist ferner $n > 4$, so sei

$$Q_1 = j \cdot \frac{c_3}{a_1 a_3} P_1, \quad Q_2 = j \cdot \frac{a_1 a_2}{b_1} \cdot P_2, \quad Q_3 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot a_3 \cdot P_3, \ldots$$

und allgemein

$$Q_{2\nu} = j \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2 b_4 \cdots b_{2\nu-2}}{b_3 b_5 \cdots b_{2\nu-1}} \cdot a_{2\nu} \cdot P_{2\nu}, \quad Q_{2\nu+1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{b_1 b_3 \cdots b_{2\nu-1}}{b_2 b_4 \cdots b_{2\nu}} \cdot a_{2\nu+1} P_{2\nu+1}.$$

Dann wird, wie eine einfache Rechnung zeigt, für $n = 5$

$$(15.) \qquad Q_1^3 = Q_2^2 = Q_3^2 = (Q_1 Q_2)^3 = (Q_1 Q_3)^2 = (Q_2 Q_3)^5 = jE,$$

für $n = 6$

$$(16.)\quad \begin{cases} Q_1^3 = Q_2^2 = Q_3^2 = Q_4^2 = (Q_1 Q_2)^3 = (Q_1 Q_3)^2 = (Q_2 Q_3)^3 = (Q_3 Q_4)^3 = jE, \\ (Q_1 Q_4)^2 = kE, \;\; Q_2 Q_4 = j \cdot Q_4 Q_2, \end{cases}$$

für $n = 7$

$$(17.)\quad \begin{cases} Q_1^3 = Q_\alpha^2 = (Q_1 Q_2)^3 = (Q_1 Q_3)^2 = (Q_1 Q_5)^2 = (Q_\beta Q_{\beta+1})^3 = jE \quad \binom{\alpha=2,3,4,5,}{\beta=2,3,4} \\ (Q_1 Q_4)^2 = kE, \;\; Q_\gamma Q_\delta = j \cdot Q_\delta Q_\gamma, \qquad (\gamma=2,3,\ \delta \geqq \gamma+2) \end{cases}$$

und für $n > 7$

$$(18.)\quad \begin{cases} Q_1^3 = jE, \;\; (Q_1 Q_2)^3 = jE, \;\; (Q_1 Q_\lambda)^2 = jE, \\ Q_\alpha^2 = jE, \;\; (Q_\beta Q_{\beta+1})^3 = jE, \;\; Q_\gamma Q_\delta = j \cdot Q_\delta Q_\gamma. \end{cases}$$

In den Gleichungen (18.) sind die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ denselben Bedingungen zu unterwerfen, wie in den Gleichungen (III.)

§ 5. Wir können nun leicht die Darstellungsgruppe von $\mathfrak{A}_n^{\prime}$ bestimmen*).

Man betrachte nämlich die Darstellungsgruppe $\mathfrak{T}_n$ von $\mathfrak{S}_n$. Wegen des zwischen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n$ bestehenden (mehrstufigen) Isomorphismus entspricht der Untergruppe $\mathfrak{A}_n$ der Ordnung $\frac{n!}{2}$ von $\mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ der Ordnung $2 \cdot \frac{n!}{2}$ von $\mathfrak{T}_n$. Diese Gruppe $\mathfrak{B}_n$ läßt sich durch die Elemente

$$B_1 = T_2 T_1, \;\; B_2 = T_3 T_1, \;\; B_3 = T_4 T_1, \;\; \ldots \;\; B_{n-2} = T_{n-1} T_1$$

erzeugen, und man erkennt auf Grund der Relationen (II.) unmittelbar, daß für diese Elemente die den Gleichungen (III.) analogen Gleichungen

$$(IV.)\quad \begin{cases} B_1^3 = J, \;\; (B_1 B_2)^3 = J, \;\; (B_1 B_\lambda)^2 = J, \\ B_\alpha^2 = J, \;\; (B_\beta B_{\beta+1})^3 = J, \;\; B_\gamma B_\delta = J \cdot B_\delta B_\gamma \end{cases}$$

bestehen. *Durch diese Gleichungen wird auch die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ als abstrakte Gruppe eindeutig definiert.* Daß J mit den erzeugenden Elementen $B_1, B_2, \ldots B_{n-2}$ vertauschbar ist und die Ordnung 2 besitzt, ergibt sich aus (IV.) von selbst.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ ist eine durch die Gruppe $\mathfrak{M} = E + J$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{A}_n$ und man erkennt auch leicht, daß für $n \geqq 4$ der Kommutator von $\mathfrak{B}_n$ das Element J enthält**). Ist nun n größer als 3 und von

---

*) Daß die Gruppe $\mathfrak{A}_n$, die bekanntlich für $n > 4$ eine einfache Gruppe ist, nur eine Darstellungsgruppe besitzt, ergibt sich aus dem Satz II meiner mit U. zitierten Arbeit.

**) Dies folgt z. B. aus der Gleichung $B_1^{-1} B_2 B_1 \cdot B_2 = J B_2 \cdot B_1^{-1} B_2 B_1$.

6 und 7 verschieden, so lehren uns die Formeln (14.), (15.) und (18.), daß die Gleichungen (IV.) befriedigt werden, wenn man die Elemente J und B_ν durch die Matrizen jE und Q_ν ersetzt. Hieraus folgt aber, ähnlich wie in § 3 für die Gruppe $\mathfrak{S}_n$, daß *die Gruppe* $\mathfrak{B}_n$ *für* $n \geqq 4$ *mit Ausnahme der beiden Fälle* $n=6$ *und* $n=7$ *die Darstellungsgruppe von* $\mathfrak{A}_n$ *ist.*

Dagegen schließt man aus den Gleichungen (16.) und (17.), indem man noch die Gleichung $k^3 = j = \pm 1$ berücksichtigt, daß *die Darstellungsgruppen von* $\mathfrak{A}_6$ *und* $\mathfrak{A}_7$ *gewisse Gruppen der Ordnungen* $6 \cdot \frac{6!}{2}$ *und* $6 \cdot \frac{7!}{2}$ *sind.* Diese Gruppen werde ich im Abschnitt XI genauer untersuchen.

Die beiden Fälle $n=2$ und $n=3$, die wir bis jetzt außer Acht gelassen haben, sind für uns ohne Interesse. Denn $\mathfrak{A}_2$ ist von der Ordnung 1 und $\mathfrak{A}_3$ ist eine zyklische und daher gewiß eine abgeschlossene Gruppe.

Bei der Definition der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ sind wir von der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ ausgegangen. Man wird aber auf dieselbe Gruppe geführt, wenn man an Stelle von $\mathfrak{T}_n$ die zweite Darstellungsgruppe $\mathfrak{T}'_n$ von $\mathfrak{S}_n$ betrachtet. Man erkennt dies, indem man zeigt, daß die Elemente

$$B_1 = J T'_2 T'_1, \quad B_2 = J T'_3 T'_1, \quad \ldots \quad B_{n-2} = J T'_{n-1} T'_1$$

von $\mathfrak{T}'_n$ den Relationen (IV.) genügen.

Für $n \geqq 4$ kann die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ noch etwas anders charakterisiert werden. Beachtet man nämlich, daß der Kommutator von $\mathfrak{S}_n$ die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist und daß der Kommutator von $\mathfrak{T}_n$ (oder $\mathfrak{T}'_n$) das Element J enthält, so ergibt sich, daß die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ für $n \geqq 4$ nichts anderes ist, als der Kommutator von $\mathfrak{T}_n$ (oder $\mathfrak{T}'_n$). Wir können daher den Satz aussprechen:

II. *Die Darstellungsgruppe der alternierenden Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *ist, falls n größer als drei und von sechs und sieben verschieden ist, eine Gruppe der Ordnung* $2 \cdot \frac{n!}{2}$, *die dem Kommutator jeder Darstellungsgruppe der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *einstufig isomorph ist. Dagegen sind die Darstellungsgruppen der Gruppen* $\mathfrak{A}_6$ *und* $\mathfrak{A}_7$ *von den Ordnungen* $6 \cdot \frac{6!}{2}$ *und* $6 \cdot \frac{7!}{2}$.

Für die Diskussion der Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch Kollineationen ist es natürlich ganz ohne Bedeutung, welche von ihren beiden Darstellungsgruppen bevorzugt wird. Wenn nun im folgenden die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ in den Vordergrund gestellt wird, so hat das folgenden Grund: Die Elemente $A_2, A_3, \ldots A_{n-2}$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ erzeugen eine Gruppe, die der

Gruppe $\mathfrak{S}_{n-2}$ isomorph ist. In analoger Weise erzeugen die Elemente $B_2, B_3, \ldots B_{n-2}$ von $\mathfrak{B}_n$ eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{S}_{n-2}$. Die Gleichungen (IV.) zeigen uns aber, daß diese Gruppe der Gruppe $\mathfrak{T}_{n-2}$ und nicht der Gruppe $\mathfrak{T}'_{n-2}$ isomorph ist.

Abschnitt II.

Über die Einteilung der Elemente der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ in Klassen konjugierter Elemente.

§ 6. Ist die Permutation P der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ gleich dem Produkt $S_\alpha S_\beta S_\gamma \cdots$ der Transpositionen $S_1 = (1\,2)$, $S_2 = (2\,3)$, ..., $S_{n-1} = (n-1, n)$, so entsprechen dieser Permutation in der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ die beiden Elemente $T_\alpha T_\beta T_\gamma \cdots$ und $J T_\alpha T_\beta T_\gamma \cdots$. Wird von diesen Elementen nach irgendeiner Festsetzung das eine mit P' bezeichnet, so wird das andere gleich JP'. Wir denken uns für jede Permutation P von $\mathfrak{S}_n$ das Element P' von $\mathfrak{T}_n$ eindeutig fixiert. Dann bilden also die $n!$ Elemente P' von $\mathfrak{T}_n$ ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{T}_n$ mod $\mathfrak{M}$, und es ist, falls für drei Permutationen P, Q und R die Gleichung $PQ = R$ besteht, $P'Q'$ entweder gleich R' oder gleich JR'. Sind daher A und B zwei vertauschbare Permutationen, so ist $A'B'$ entweder gleich $B'A'$ oder gleich $JB'A'$. Sind ferner P und Q zwei konjugierte (ähnliche) Permutationen, so ist in $\mathfrak{T}_n$ das Element P' jedenfalls einem der Elemente Q' und JQ' konjugiert.

Eine Permutation P bezeichne ich als *eine Permutation erster oder zweiter Art, je nachdem P' und JP' konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ sind oder nicht.* Zwei ähnliche Permutationen gehören dann entweder beide zur ersten Art oder beide zur zweiten Art.

Es seien nun

$$P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots\ P_{h-1}$$

die sämtlichen zu einer gegebenen Permutation P ähnlichen Permutationen von $\mathfrak{S}_n$. Ist dann P von der ersten Art, so bilden die $2h$ Elemente

$$P',\ JP',\ P'_1,\ JP'_1,\ \ldots\ P'_{h-1},\ JP'_{h-1}$$

eine Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{T}_n$. Gehört dagegen P zur zweiten Art, so verteilen sich diese $2h$ Elemente auf *zwei* Klassen von je h konjugierten Elementen; hierbei geht die eine Klasse in die andere über, wenn man jedes ihrer Elemente mit J multipliziert. — Wir können diese beiden Fälle auch folgendermaßen unterscheiden: Im ersten

Falle gibt es eine Permutation Q, die mit P vertauschbar ist, ohne daß Q' mit P' vertauschbar wird, und die Anzahl $\frac{2n!}{2h}$ der mit P' vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{T}_n$ wird gleich der Anzahl $\frac{n!}{h}$ der mit P vertauschbaren Permutationen von $\mathfrak{S}_n$. Im zweiten Fall ist dagegen für jede mit P vertauschbare Permutation Q das Element Q' mit P' vertauschbar, und die Anzahl der mit P' vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{T}_n$ wird gleich $\frac{2n!}{h}$, also gleich der zweifachen Anzahl der mit P vertauschbaren Permutationen von $\mathfrak{S}_n$.

Man betrachte nun insbesondere zwei (vertauschbare) Permutationen A und B, von denen die erste die Ziffern $m+1, m+2, \ldots n$, die zweite die Ziffern $1, 2, \ldots m$ ungeändert läßt. Dann läßt sich A als Produkt der Transpositionen $S_1, S_2, \ldots S_{m-1}$ und B als Produkt der Transpositionen $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots S_{n-1}$ darstellen. Da nun aber, wenn λ einen der Indizes $1, 2, \ldots m-1$ und μ einen der Indizes $m+1, m+2, \ldots n-1$ bedeutet,

$$T_\lambda T_\mu = J T_\mu T_\lambda$$

wird, so erkennt man leicht, daß die Elemente A' und B' von $\mathfrak{T}_n$ stets und nur dann nicht vertauschbar sind, wenn die Permutationen A und B beide ungerade sind. Hieraus schließt man ohne Mühe allgemeiner:

III. *Sind A und B zwei Permutationen von $\mathfrak{S}_n$, deren Zykeln von höherer als der ersten Ordnung keine Ziffer gemeinsam haben, so sind die Elemente A' und B' von $\mathfrak{T}_n$ nur dann untereinander nicht vertauschbar, wenn die Permutationen A und B beide ungerade sind; in diesem Falle wird $A'B' = J \cdot B'A'$.*

§ 7. Auf Grund dieser Regel können wir beweisen:

IV. *Eine gerade Permutation gehört zur ersten Art, wenn unter ihren Zykeln auch solche gerader Ordnung vorkommen, und zur zweiten Art, wenn sie lauter Zykeln ungerader Ordnung enthält. Eine ungerade Permutation gehört ferner zur ersten Art, wenn sie mindestens zwei Zykeln gleicher Ordnung $m \geqq 1$ enthält, und zur zweiten Art, wenn die Ordnungen ihrer Zykeln voneinander verschieden sind.*

Wir haben, um diesen Satz zu beweisen, vier Fälle zu unterscheiden.

a) Es sei die Permutation P gerade und enthalte einen Zyklus A gerader Ordnung. Ist dann $P = AB$, so wird, da P eine gerade und A eine ungerade Permutation ist, B eine ungerade Permutation. Nun er-

scheinen aber A und B als zwei ungerade Permutationen, deren Zykeln (von höherer als der ersten Ordnung) keine Ziffer gemeinsam haben. Daher ist nach III

$$A'B' = JB'A',$$

oder

$$A'^{-1}(A'B')A' = JA'B'.$$

Da nun aber P' entweder gleich $A'B'$ oder gleich $JA'B'$ ist, so ergibt sich auch $A'^{-1}P'A' = JP'$; daher ist P eine Permutation erster Art.

b) Die Permutation P bestehe aus lauter Zykeln ungerader Ordnung. Dann ist die Ordnung a von P eine ungerade Zahl. Es wird daher $P'^a = J^\alpha$, wo α gleich Null oder Eins ist, und $(JP')^a = J^a J^a = J^{a+1}$. Folglich sind die Ordnungen von P' und JP' voneinander verschieden, und daher können P' und JP' nicht konjugierte Elemente sein, d. h. P ist eine Permutation zweiter Art.

c) Es sei P eine ungerade Permutation, die zwei Zykeln A und B derselben Ordnung $m \geqq 1$ enthält. Es sei etwa

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m).$$

Setzt man

$$C = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots \alpha_m, \beta_m),$$

so wird $C^2 = AB$ und $P = C^2 D$, wo D das Produkt der von A und B verschiedenen Zykeln bedeutet. Da P eine ungerade und C^2 eine gerade Permutation ist, so wird D eine ungerade Permutation, deren Zykeln mit den Zykeln der ebenfalls ungeraden Permutation C keine Ziffer gemeinsam haben. Wir erhalten daher wieder $D'C' = JC'D'$ und

$$C'^{-1}(C'^2 D')C' = C'D'C' = JC'^2 D'.$$

Da sich nun P' von $C'^2 D'$ nur um den Faktor J unterscheiden kann, so wird auch $C'^{-1}P'C' = JP'$, folglich gehört P zur ersten Art.

d) Es bestehe nun die ungerade Permutation P aus r Zykeln $C_1, C_2, \ldots C_r$, deren Ordnungen $c_1, c_2, \ldots c_r$ untereinander verschieden sind. Dann ist $P = C_1 C_2 \cdots C_r$ nur mit den $c_1 c_2 \cdots c_r$ Permutationen

$$C_1^{\gamma_1} C_2^{\gamma_2} \cdots C_r^{\gamma_r} \qquad (\gamma_\varrho = 0, 1, \ldots c_\varrho - 1)$$

vertauschbar. Bedeutet s die Anzahl der geraden unter den Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_r$, so ist s, weil P eine ungerade Permutation sein soll, eine ungerade Zahl. Betrachtet man nun die Elemente $C_1', C_2', \ldots C_r'$ von $\mathfrak{T}_n$, so wird für je zwei Indizes ϱ und σ entweder

$$C'_\varrho C'_\sigma = C'_\sigma C'_\varrho \quad \text{oder} \quad C'_\varrho C'_\sigma = JC'_\sigma C'_\varrho,$$

und zwar gilt hier folgende Regel: Ist für ein festes ϱ die Zahl c_ϱ ungerade, also die Permutation C_ϱ gerade, so gilt für jedes σ die erste Gleichung. Ist dagegen c_ϱ eine gerade Zahl und folglich C_ϱ eine ungerade Permutation, so besteht die zweite Gleichung nur für diejenigen $s-1$ Zahlen σ, die von ϱ verschieden sind, und für welche die Zahlen c_σ ebenfalls gerade sind. Da nun aber $s-1$ gerade ist, so erkennt man unmittelbar, daß jedes Element C'_ϱ mit dem Produkt $C'_1 C'_2 \cdots C'_r$ und folglich auch mit dem Element P', das sich von diesem Produkt nur um den Faktor J unterscheiden kann, vertauschbar ist. Folglich ist P' mit den $2c_1 c_2 \cdots c_r$ Elementen

$$J^\beta C_1^{\prime\gamma_1} C_2^{\prime\gamma_2} \cdots C_r^{\prime\gamma_r} \qquad (\beta = 0,1;\ \gamma_\varrho = 0,1,\ldots c_\varrho - 1)$$

vertauschbar. Es können demnach P' und JP' nicht konjugierte Elemente sein.

§ 8. Wir können nun leicht die Anzahl k'_n der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{T}_n$ bestimmen.

Eine Zerlegung

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \qquad (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_m)$$

der Zahl n in ganzzahlige positive Summanden nenne ich *eine gerade oder eine ungerade Zerlegung, je nachdem die Anzahl der geraden unter den Zahlen* $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ *gerade oder ungerade ist. Ferner bezeichne ich mit* k_n *die Anzahl aller Zerlegungen von* n *in gleiche oder verschiedene Summanden, mit* g_n *die Anzahl der geraden und mit* u_n *die Anzahl der ungeraden Zerlegungen von* n *in voneinander verschiedene Summanden. Außerdem verstehe ich unter* v_n *die Anzahl der Zerlegungen von* n *in gleiche oder verschiedene ungerade Summanden.* Die Zahl v_n gibt dann bekanntlich zugleich auch die Anzahl der Zerlegungen von n in voneinander verschiedene Summanden an*); daher ist

$$v_n = g_n + u_n. \tag{19.}$$

Nun ist die Anzahl der Klassen konjugierter Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ bekanntlich gleich der mit k_n bezeichneten Zahl. Einer Klasse von Permutationen erster Art von $\mathfrak{S}_n$ entspricht in $\mathfrak{T}_n$ nur eine Klasse konjugierter Elemente, dagegen gehören zu jeder Klasse von Permutationen zweiter Art von $\mathfrak{S}_n$ zwei Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{T}_n$. Da nun die Anzahl

*) Vgl. etwa *Bachmann*, Analytische Zahlentheorie, S. 30.

der zuletzt genannten Klassen von $\mathfrak{S}_n$ nach Satz IV offenbar gleich $v_n + u_n$ ist, so wird *die gesuchte Anzahl k'_n der Klassen von $\mathfrak{T}_n$ gleich*

$$k_n - v_n - u_n + 2(v_n + u_n) = k_n + v_n + u_n .$$

Beachtet man noch die Gleichung (19.), so erhält man

$$k'_n = k_n + g_n + 2u_n . \tag{20.}$$

Ich bemerke noch folgendes. Die Zahlen k_n und v_n lassen sich in bekannter Weise mit Hilfe einfacher Rekursionsformeln berechnen*). Kennt man aber die Zahl v_n, so lassen sich g_n und u_n leicht angeben. Setzt man nämlich

$$d_n = g_n - u_n , \quad d_0 = 1 ,$$

so wird wegen (19.)

$$g_n = \frac{1}{2}(v_n + d_n) , \quad u_n = \frac{1}{2}(v_n - d_n) .$$

Es ist aber, wie man leicht erkennt, für $|x| < 1$

$$\sum_0^\infty d_n x^n = (1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)\cdots ,$$

also

$$\sum_0^\infty (-1)^n d_n x^n = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots .$$

Da nun nach einer bekannten von *Euler* angegebenen Formel

$$\prod_1^\infty (1-x^\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu x^{\frac{3\nu^2+\nu}{2}}$$

ist**), so ergibt sich, daß $d_n = 0$ ist, wenn n nicht die Form $\frac{3\nu^2+\nu}{2}$ hat, und daß $d_n = (-1)^{\frac{\nu^2+\nu}{2}}$ wird, wenn $n = \frac{3\nu^2+\nu}{2}$ ist.

Es mögen hier einige der Werte von g_n und u_n angeführt werden:

$g_1 = 1$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$, $g_4 = 1$, $g_5 = 1$, $g_6 = 2$, $g_7 = 2$, $g_8 = 3$, $g_9 = 4$, $g_{10} = 5$;

$u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$, $u_6 = 2$, $u_7 = 3$, $u_8 = 3$, $u_9 = 4$ $u_{10} = 5$.

§ 9. Ich wende mich nun zur Betrachtung der Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{T}_n$, die der Untergruppe $\mathfrak{A}_n$ von $\mathfrak{S}_n$ entspricht.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ wird dadurch erhalten, daß man für alle $\frac{n!}{2}$ geraden Permutationen P die Elemente P' und JP' von $\mathfrak{T}_n$ bildet. Einer Klasse $\mathfrak{C}$ von h konjugierten Permutationen der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ entspricht wieder in der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ entweder nur eine Klasse von $2h$ konjugierten Elementen,

*) Vgl. *Bachmann*, a. a. O., S. 28 und S. 44.

**) Vgl. *Bachmann*, a. a. O., S. 24.

oder es entsprechen ihr zwei Klassen von je h Elementen, wobei die eine Klasse in die andere übergeht, indem man jedes ihrer Elemente mit J multipliziert. Ist P eine Permutation der Klasse $\mathfrak{C}$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem P' und JP' konjugierte Elemente von $\mathfrak{B}_n$ sind oder nicht.

Um also die Einteilung der Elemente von $\mathfrak{B}_n$ in Klassen konjugierter Elemente durchzuführen, haben wir vor allem zu entscheiden, für welche geraden Permutationen P die Elemente P' und JP' in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ konjugiert sind. Eine solche Permutation P ist dadurch charakterisiert, daß sich eine mit P vertauschbare *gerade* Permutation Q angeben läßt, so daß P' und Q' nicht vertauschbar sind, vielmehr der Gleichung $P'Q' = JQ'P'$ genügen.

Ist nun P eine gerade Permutation zweiter Art (d. h. eine Permutation ungerader Ordnung), so sind P' und JP' bereits in $\mathfrak{T}_n$, also um so mehr in $\mathfrak{B}_n$, nicht konjugiert. Wir haben also nur die geraden Permutationen erster Art zu untersuchen, d. h. diejenigen geraden Permutationen, unter deren Zykeln auch solche gerader Ordnung vorkommen.

Ich will nun zeigen:

V. *Ist P eine gerade Permutation erster Art, so sind P' und JP' stets und nur dann konjugierte Elemente von $\mathfrak{B}_n$, wenn P mindestens zwei Zykeln gleicher Ordnung $m \geqq 1$ enthält.*

Ist nämlich A ein Zyklus gerader Ordnung von P, so ist, wie wir auf Seite 173 gesehen haben, $A'^{-1}P'A' = JP'$. Es enthalte nun P noch zwei Zykeln

$$B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m), \quad C = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m)$$

von derselben Ordnung $m \geqq 1$; hierbei kann einer der Zykeln B und C auch gleich A sein. Wir setzen

$$D = (\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \ldots \beta_m, \gamma_m),$$

so daß $D^2 = BC$ wird. Ist dann $P = BCF = D^2F$, so ist F, da P gerade ist, eine gerade Permutation; nach Satz III ist daher $D'F' = F'D'$ und also

$$D'^{-1}(D'^2F')D' = D'^2F'.$$

Folglich ist auch $D'^{-1}P'D' = P'$ und mithin

$$(A'D')^{-1}P'(A'D') = JP'.$$

Da nun A und D ungerade Permutationen sind, so ist AD in $\mathfrak{A}_n$, folglich $A'D'$ in $\mathfrak{B}_n$ enthalten. Daher sind P' und JP' in bezug auf $\mathfrak{B}_n$ konjugiert.

Es möge nun P aus r Zykeln $C_1, C_2, \dots C_r$ bestehen, deren Ordnungen $c_1, c_2, \dots c_r$ untereinander verschieden sind. Dann ist P in der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ nur mit den $c_1 c_2 \cdots c_r$ Permutationen

$$C_1^{\gamma_1} C_2^{\gamma_2} \cdots C_r^{\gamma_r} \qquad (\gamma_\varrho = 0, 1, \dots c_\varrho - 1)$$

vertauschbar. Unter diesen Permutationen sind diejenigen gerade, für welche die Summe aller γ_ϱ, denen gerade c_ϱ entsprechen, eine gerade Zahl ist. Da nun P eine gerade Permutation sein soll, so ist die Anzahl s der geraden unter den Zahlen c_ϱ eine gerade Zahl. Wir schließen nun ähnlich wie im Fall d) des § 7, daß das Element P' mit dem Element C'_ϱ von $\mathfrak{T}_n$ vertauschbar ist oder nicht, je nachdem c_ϱ eine ungerade oder eine, gerade Zahl ist. Hieraus folgt aber leicht, daß P' mit dem Element

$$C_1'^{\gamma_1} C_2'^{\gamma_2} \cdots C_r'^{\gamma_r}$$

stets vertauschbar ist, wenn die ihm entsprechende Permutation $C_1^{\gamma_1} C_2^{\gamma_2} \cdots C_r^{\gamma_r}$ gerade ist. Es gibt also keine mit P vertauschbare gerade Permutation Q für die P' und Q' nicht vertauschbare Elemente werden. Folglich können P' und JP' nicht konjugierte Elemente von $\mathfrak{B}_n$ sein, w. z. b. w.

§ 10. Es soll nun gezeigt werden, daß, *wenn l_n die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ bedeutet, die entsprechende Anzahl für die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ gleich wird*

$$l'_n = l_n + 2g_n + u_n, \tag{21.}$$

wo g_n und u_n dieselbe Bedeutung haben wie in § 8.

Betrachtet man nämlich eine Klasse $\mathfrak{C}$ von h konjugierten geraden Permutationen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$, so bilden sie im allgemeinen auch in der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ eine Klasse konjugierter Elemente. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Zykeln jeder Permutation von $\mathfrak{C}$ lauter voneinander verschiedene ungerade Ordnungen besitzen; in diesem Fall zerfallen die h Permutationen von $\mathfrak{C}$ in der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ in zwei Klassen von je $\frac{1}{2}h$ konjugierten Elementen. Hierbei geht die eine Klasse aus der anderen dadurch hervor, daß man ihre Elemente mit Hilfe irgendeiner ungeraden Permutation transformiert.*)

Bedeutet daher v'_n die Anzahl der Zerlegungen von n in voneinander verschiedene ungerade Summanden, so verteilen sich die geraden Permu-

*) Vgl. *Frobenius*, „Über die Charaktere der alternierenden Gruppe", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin 1901, S. 303.

tationen *zweiter* Art in der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ auf $v_n + v'_n$ Klassen konjugierter Elemente. Diesen Klassen entsprechen in der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ genau $2(v_n + v'_n)$ Klassen konjugierter Elemente. Versteht man ferner unter g'_n die Anzahl der geraden Zerlegungen von n in voneinander verschiedene Summanden, unter denen auch gerade Zahlen vorkommen, so hat man in $\mathfrak{A}_n$ genau g'_n Klassen konjugierter Permutationen, die zur *ersten* Art gehören und deren Zykeln voneinander verschiedene Ordnungen besitzen. Nach Satz V entsprechen diesen g'_n Klassen in der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ genau $2g'_n$ Klassen konjugierter Elemente. Dagegen gehört zu jeder der übrigen $l_n - (v_n + v'_n + g'_n)$ Klassen von $\mathfrak{A}_n$ in $\mathfrak{B}_n$ nur eine Klasse. Folglich ist

$$l'_n = l_n - (v_n + v'_n + g'_n) + 2(v_n + v'_n + g'_n) = l_n + v_n + v'_n + g'_n.$$

Da aber offenbar $v'_n + g'_n = g_n$ und außerdem $v_n = g_n + u_n$ ist, so erhält man die zu beweisende Formel (21.).

Die geraden Permutationen, deren Zykeln voneinander verschiedene Ordnungen besitzen, will ich im folgenden als *Permutationen dritter Art* bezeichnen. Eine solche Permutation gehört also gleichzeitig auch zur ersten Art, wenn unter den Ordnungen ihrer Zykeln gerade Zahlen vorkommen, und zur zweiten Art, wenn diese Ordnungen sämtlich ungerade sind. Nur für zwei Permutationen P und Q dritter Art kann es eintreten, daß P' und Q' in $\mathfrak{T}_n$, aber nicht in $\mathfrak{B}_n$ einander konjugiert sind. Zwei solche Elemente von $\mathfrak{B}_n$ will ich als *adjungierte Elemente* bezeichnen. Analog nenne ich zwei Permutationen von $\mathfrak{A}_n$, die in $\mathfrak{S}_n$, aber nicht in $\mathfrak{A}_n$ einander konjugiert sind, *adjungierte Permutationen.*

Abschnitt III.

Über die Zuordnung der Elemente der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n$.

§ 11. Wir haben bis jetzt noch keine Festsetzung darüber getroffen, welches von den beiden Elementen von $\mathfrak{T}_n$, die einer Permutation P von $\mathfrak{S}_n$ entsprechen, mit P' bezeichnet werden soll. Es ist für unsere Untersuchung von wesentlicher Bedeutung, die Bezeichnung genauer zu fixieren. Wir suchen hierbei insbesondere zu erreichen, daß *für je zwei Permutationen P und Q, die in $\mathfrak{S}_n$ oder auch in $\mathfrak{A}_n$ konjugiert sind, P' und Q' konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ oder von $\mathfrak{B}_n$ werden.*

Ein Zyklus

$$C_{\mu,\nu} = (\mu, \mu+1, \ldots \mu+\nu-1)$$

der Ordnung ν läßt sich mit Hilfe der Transpositionen $S_\alpha = (\alpha, \alpha+1)$ in der Form

$$C_{\mu,\nu} = S_{\mu+\nu-2} S_{\mu+\nu-3} \cdots S_\mu$$

darstellen. *Unter $C'_{\mu,\nu}$ wollen wir dann das Element*

$$C'_{\mu,\nu} = T_{\mu+\nu-2} T_{\mu+\nu-3} \cdots T_\mu$$

verstehen. — Ist nun ν ungerade, so ist nach Satz IV von den beiden Elementen $C'_{\mu,\nu}$ und $JC'_{\mu,\nu}$ nur eins dem speziellen Element $C'_{1,\nu}$ in $\mathfrak{T}_n$ konjugiert. Es ist aber leicht zu sehen, daß dies für das Element $C'_{\mu,\nu}$ eintritt. In der Tat sind die beiden Gruppen $\mathfrak{T}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{T}}_\nu$, die durch die Elemente $T_1, T_2, \ldots T_{\nu-1}$, bzw. $T_\mu, T_{\mu+1}, \ldots T_{\mu+\nu-2}$ erzeugt werden, wie aus den die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ definierenden Relationen (II.) hervorgeht, isomorph, und zwar erhält man einen Isomorphismus zwischen diesen Gruppen, indem man dem erzeugenden Element $T_{1+\varrho}$ von $\mathfrak{T}_\nu$ das Element $T_{\mu+\varrho}$ von $\overline{\mathfrak{T}}_\nu$ zuordnet. Daher haben offenbar $C'_{1,\nu}$ und $C'_{\mu,\nu}$ dieselbe Ordnung ν', wobei ν' gleich ν oder gleich 2ν ist*). Wären nun $C'_{1,\nu}$ und $JC'_{\mu,\nu}$ konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$, so müßten sie von gleicher Ordnung sein, was aber, da ν ungerade ist, nicht der Fall ist.

Ist nun A irgendein Zyklus von *ungerader* Ordnung ν, so ist nur eins von den beiden Elementen von $\mathfrak{T}_n$, die zu A gehören, dem Element $C'_{1,\nu}$ konjugiert. *Das hierdurch gekennzeichnete Element bezeichne ich mit A'. Ist ferner*

$$P = A_1 A_2 \cdots A_m$$

eine Permutation, deren Zykeln $A_1, A_2, \ldots A_m$ lauter ungerade Ordnungen haben, so setze ich

(22.) $$P' = A'_1 A'_2 \cdots A'_m$$**).

Hierbei sind die Elemente $A'_1, A'_2, \ldots A'_m$, weil die Permutationen A_μ gerade sind, nach Satz III untereinander vertauschbar, daher kann in (22.) die Reihenfolge der Faktoren A'_μ beliebig abgeändert werden. Die Ordnung des Elements P' ist nichts anderes als das kleinste gemeinsame Vielfache der

---

*) Es ist, wie man zeigen kann, $\nu' = \nu$ oder $\nu' = 2\nu$, je nachdem $(-1)^{\frac{\nu'-1}{8}}$ gleich 1 oder gleich -1 ist. Ist ferner ν eine gerade Zahl, so wird die Ordnung des Elements $C'_{\mu,\nu}$ gleich ν für $\nu = 8\lambda$ oder $\nu = 8\lambda+6$, dagegen gleich 2ν für $\nu = 8\lambda+2$ oder $\nu = 8\lambda+4$.

**) Ist $P = E$, so setze ich natürlich auch $P' = E$.

Ordnungen von $A_1', A_2', \dots A_m'$. Hieraus folgt leicht, daß, wenn Q eine zu P in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder auch in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ konjugierte Permutation ist, das mit Q' zu bezeichnende Element dem Element P' in $\mathfrak{T}_n$, bzw. in $\mathfrak{B}_n$ konjugiert ist.

Es sei nun C ein Zyklus von *gerader* Ordnung ν, den wir jedoch der Bedingung unterwerfen, daß er nur die Ziffern $\mu, \mu+1, \dots \mu+\nu-1$ (in beliebiger Reihenfolge) enthalten soll. Dann läßt sich C ebenso wie der Zyklus $C_{\mu,\nu}$ als Produkt der Transpositionen $S_\mu, S_{\mu+1}, \dots S_{\mu+\nu-2}$ darstellen. Daher sind die beiden zu C gehörenden Elemente von $\mathfrak{T}_n$ in der früher betrachteten Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}_\nu$ enthalten. Nach Satz IV ist aber nur eins von diesen beiden Elementen in bezug auf die Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}_\nu$ dem Element $C'_{\mu,\nu}$ konjugiert. *Das hierdurch charakterisierte Element bezeichne ich mit* C'. Dann sind also auch für zwei verschiedene Zykeln B und C der Ordnung ν, in denen nur die Ziffern $\mu, \mu+1, \dots \mu+\nu-1$ auftreten, B' und C' in der Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}_\nu$ einander konjugiert.

Wir betrachten jetzt die Permutationen P mit den m Zykeln

$$C_1 = C_{1,\nu_1} = (1, 2, \dots \nu_1),\ C_2 = C_{\nu_1+1,\nu_2} = (\nu_1+1, \nu_1+2, \dots \nu_1+\nu_2), \dots;$$

hierbei soll $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m \geqq 1$ sein, und es sollen unter den ν_μ auch gerade Zahlen vorkommen, so daß P also eine Permutation zweiter oder dritter Art wird. Es wird dann

$$P = C_1 C_2 \cdots C_m.$$

Entsprechend setze ich

$$P' = C_1' C_2' \cdots C_m'.$$

In dieser Gleichung darf die Reihenfolge der Faktoren nicht mehr beliebig abgeändert werden. Es ist aber hervorzuheben, daß diejenigen Faktoren C_μ', für welche die ν_μ ungerade Zahlen sind, beliebig angeordnet werden dürfen. Das Element P' bleibt also z. B. ungeändert, wenn man zuerst die Faktoren C_μ' mit ungeradem ν_μ schreibt und dann die Faktoren mit geradem ν_μ nach abnehmender Größe dieser Zahlen folgen läßt.

Ist nun Q eine beliebige Permutation, deren m Zykeln ebenso wie bei P die Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$ haben, so sind P und Q ähnliche Permutationen. Von den beiden Elementen der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, die zu Q gehören, ist (auf Grund der Sätze IV und V), wenn P und Q ungerade Permutationen sind, nur eins dem Element P' in bezug auf $\mathfrak{T}_n$ konjugiert, und wenn P und Q gerade sind, nur eins in bezug auf $\mathfrak{B}_n$ mit P' kon-

jugiert. *Dasjenige Element, das der ersten oder der zweiten Bedingung genügt, bezeichne ich mit Q'.*

Wir haben nun insbesondere für alle Permutationen P zweiter oder dritter Art festgesetzt, welches Element von $\mathfrak{T}_n$ unter P' zu verstehen ist. Für die hier noch nicht betrachteten Permutationen erster Art denken wir uns die Bezeichnung irgendwie fixiert. Beachtet man, daß für jede unter diesen Permutationen P die Elemente P' und JP' in bezug auf $\mathfrak{T}_n$, und wenn P gerade ist, auch in bezug auf $\mathfrak{B}_n$ konjugiert sind, so erkennt man, daß auf Grund unserer Festsetzungen die früher gestellte Forderung erfüllt ist: sind P und Q zwei Permutationen, die in bezug auf die Gruppen $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ konjugiert sind, so sind auch P' und Q' konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ oder $\mathfrak{B}_n$.

§ 12. Wir müssen hier noch eine Bemerkung hinzufügen, die für das spätere von Wichtigkeit ist. Sie bezieht sich auf den zuletzt behandelten Fall der Permutationen, die in Zykeln von lauter verschiedenen Ordnungen zerfallen.

Es sei insbesondere Q eine Permutation mit m Zykeln $D_1, D_2, \ldots D_m$ der Ordnungen $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m$, und zwar möge der Zyklus D_μ nur die Ziffern

$$(23.) \qquad \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{\mu-1} + 1, \ \ldots \ \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\mu$$

(in irgendeiner Reihenfolge) enthalten. Wir haben für diesen Fall bereits festgesetzt, welche Elemente von $\mathfrak{T}_n$ wir mit $Q', D_1', D_2', \ldots D_m'$ zu bezeichnen haben. Jedenfalls wird

$$(24.) \qquad Q' = J^\alpha D_1' D_2' \cdots D_m',$$

wo α einen der Werte Null oder Eins hat. *Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ist.*

Ich bezeichne mit $\mathfrak{H}_\mu$ die symmetrische Gruppe, die aus allen $\nu_\mu!$ Permutationen der Indizes (23.) besteht, und mit $\mathfrak{K}_\mu$ die der Untergruppe $\mathfrak{H}_\mu$ von $\mathfrak{S}_n$ entsprechende Untergruppe der Ordnung $2 \cdot \nu_\mu!$ von $\mathfrak{T}_n$. Hat C_μ dieselbe Bedeutung wie auf S. 180, so sind C_μ und D_μ ähnliche Permutationen von $\mathfrak{H}_\mu$; ebenso sind auf Grund der früheren Festsetzungen C_μ' und D_μ' konjugierte Elemente von $\mathfrak{K}_\mu$. Es sei H_μ eine Permutation von $\mathfrak{H}_\mu$, die der Bedingung

$$H_\mu^{-1} C_\mu H_\mu = D_\mu$$

genügt; dann ist auch

$$H_\mu'^{-1} C_\mu' H_\mu' = D_\mu'.$$

Ist nun ν_μ eine gerade Zahl, so wählen wir, was jedenfalls möglich ist, H_μ als eine gerade Permutation. Ist aber ν_μ ungerade, so ist H_μ eine gerade Permutation, wenn C_μ und D_μ in der alternierenden Gruppe mit den Vertauschungsziffern (23.) konjugiert sind, dagegen ist H_μ ungerade, wenn dies nicht der Fall ist. Es sei nun die Anzahl der Indizes μ, für die H_μ ungerade ist, gleich r, ferner sei s die Anzahl der geraden unter den Zahlen ν_μ. Für ein gerades ν_μ ist nun H_μ', da H_μ eine gerade Permutation sein soll, wie aus Satz III folgt, stets mit C_ϱ' und D_ϱ' vertauschbar, sobald nur ϱ von μ verschieden ist. Dasselbe gilt für ein ungerades ν_μ, zu dem eine gerade Permutation H_μ gehört. Ist aber ν_μ eine ungerade Zahl und H_μ eine ungerade Permutation, so ist H_μ' mit C_ϱ' und D_ϱ' vertauschbar, wenn ϱ von μ verschieden und ν_ϱ eine ungerade Zahl ist; dagegen wird, falls ν_ϱ gerade ist,

$$H_\mu'^{-1} C_\varrho' H_\mu' = J C_\varrho', \quad H_\mu'^{-1} D_\varrho' H_\mu' = J D_\varrho'.$$

Setzt man nun

$$H = H_1 H_2 \cdots H_m,$$

so wird

$$H' = J^\beta H_1' H_2' \cdots H_m',$$

wo β gleich Null oder Eins ist. Man erkennt auch ohne Mühe, daß, wenn P' wie früher das Produkt $C_1' C_2' \cdots C_m'$ bedeutet,

$$H'^{-1} P' H' = J^{rs} D_1' D_2' \cdots D_m' = J^{rs-\alpha} Q' \tag{25.}$$

wird.

Ich behaupte nun, daß *in der Gleichung* (24.) α *gleich Null oder gleich Eins ist, je nachdem* r *eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.*

Es sei nämlich zunächst s ungerade. Dann sind P und Q ungerade Permutationen. Unter Q' ist dann das zu P' konjugierte Element von $\mathfrak{T}_n$ zu verstehen. Aus der Gleichung (25.) folgt daher

$$H'^{-1} P' H' = Q' = J^r D_1' D_2' \cdots D_m',$$

also ist $\alpha \equiv r \pmod 2$. Ist ferner s gerade, so sind P und Q gerade Permutationen dritter Art. In diesem Fall soll Q' mit P' in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ konjugiert sein. Ist nun r gerade, so wird H eine gerade Permutation, folglich ist $H'^{-1} P' H' = Q'$. Die Gleichung (25.) lehrt uns daher, daß $\alpha = 0$ zu setzen ist. Ist dagegen r ungerade, so ist H eine ungerade

Permutation und man schließt leicht, daß $H'^{-1}P'H' = JQ'$ sein muß*). Wegen (25.) muß daher $\alpha = 1$ sein.

Abschnitt IV.

Allgemeine Eigenschaften der Charaktere der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$.

§ 13. Betrachtet man irgendeine Darstellung einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ durch homogene lineare Substitutionen in f Variabeln (Matrizen f-ten Grades) und ist $\chi(R)$ die Spur der dem Element R von $\mathfrak{H}$ entsprechenden Substitution, so bezeichnet man nach Herrn *Frobenius* das System der Zahlen $\chi(R)$ als einen *Charakter f-ten Grades der Gruppe* $\mathfrak{H}$**). Ist die Darstellung irreduzibel, so nennt man $\chi(R)$ einen *einfachen* Charakter. Zwei Darstellungen sind stets und nur dann äquivalent, wenn sie denselben Charakter besitzen. Die Anzahl der einfachen Charaktere $\chi^{(0)}(R)$, $\chi^{(1)}(R), \ldots$ ist gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente, in die die Elemente von $\mathfrak{H}$ zerfallen, und zwischen diesen Charakteren bestehen die Relationen

$$(26.) \qquad \Sigma\chi^{(\alpha)}(R)\chi^{(\alpha)}(R^{-1}) = h, \quad \Sigma\chi^{(\alpha)}(R)\chi^{(\beta)}(R^{-1}) = 0,$$

wo R alle Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft und h die Ordnung von $\mathfrak{H}$ bedeutet***).

Man bezeichnet ferner, wenn $r_0, r_1, \ldots$ beliebige ganze (nicht notwendig positive) Zahlen sind, das System der Zahlen

$$\zeta(R) = r_0\chi^{(0)}(R) + r_1\chi^{(1)}(R) + \cdots$$

als einen *zusammengesetzten Charakter* von $\mathfrak{H}$. Es ist dann wegen (26.)

$$(27.) \qquad \Sigma\zeta(R)\zeta(R^{-1}) = h\,(r_0^2 + r_1^2 + \cdots).$$

Nur dann, wenn diese Summe gleich h und $\zeta(E) > 0$ wird, ist $\zeta(R)$ ein einfacher Charakter. Ist keine der Zahlen $r_0, r_1, \ldots$ negativ, so gehört zu

---

*) Dies folgt daraus, daß Q' und JQ' in $\mathfrak{T}_n$, aber nicht in $\mathfrak{B}_n$ einander konjugiert sind.

**) Hieraus folgt unmittelbar, daß für zwei konjugierte Elemente R und R' von $\mathfrak{H}$ $\chi(R) = \chi(R')$ wird.

***) Einfache Beweise dieser Sätze, die zuerst Herr *Frobenius* in einer Reihe von Abhandlungen (Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, Jahrgänge 1896—1899) aufgestellt hat, findet man in zwei Arbeiten des Herrn *W. Burnside* (Acta Mathematica, Bd. 28, S. 369, und Proceedings of the London Mathematical Society, Serie 2, Bd. 1 (1904), S. 117), ferner in meiner Arbeit „Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1905, S. 406.

$\zeta(R)$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch Matrizen des Grades $\zeta(E)$; in diesem Fall sagt man auch, $\zeta(R)$ sei ein *eigentlicher* Charakter.

Es bedeute nun $\mathfrak{H}$ eine der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ oder $\mathfrak{B}_n$ und entsprechend sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$. Ist insbesondere für einen (eigentlichen) Charakter f-ten Grades $\chi(R)$ von $\mathfrak{H}$

$$\chi(J)=j\chi(E),\ j=\pm 1^*),$$

so unterscheiden sich in der zu $\chi(R)$ gehörenden Darstellung von $\mathfrak{H}$ die den Elementen R und JR entsprechenden Matrizen (R) und (JR) nur um den Zahlenfaktor j, so daß auch

$$\chi(JR)=j\chi(R) \tag{28.}$$

wird. Durch die beiden Matrizen (R) und (JR) ist dann nur *eine* gebrochene lineare Substitution bestimmt, und die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet eine mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{K}$, die ich *die zu dem Charakter $\chi(R)$ gehörende Kollineationsgruppe* nenne. Ist k die Ordnung von $\mathfrak{K}$, so läßt sich $\mathfrak{K}$ stets und nur dann als Gruppe von k homogenen linearen Substitutionen schreiben, wenn $j=1$ oder $n\leqq 3$ ist (vgl. § 2).

Einen Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{H}$, für den die Gleichungen (28.) bestehen, bezeichne ich als einen *Charakter erster oder zweiter Art*, je nachdem $j=+1$ oder $j=-1$ ist.

Ist $\chi(R)$ ein einfacher Charakter erster Art von $\mathfrak{H}$, so bilden die Zahlen

$$\overline{\chi}(P)=\chi(P')=\chi(JP')$$

einen einfachen Charakter von $\mathfrak{G}$. Hierbei soll P' wie früher das der Permutation P von $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ zugeordnete Element von $\mathfrak{T}_n$ oder $\mathfrak{B}_n$ bedeuten. Umgekehrt erhält man aus jedem Charakter $\overline{\chi}(P)$ von $\mathfrak{G}$ einen einfachen Charakter erster Art $\chi(R)$ von $\mathfrak{H}$, indem man die Zahlen $\chi(P')$ und $\chi(JP')$ gleich $\overline{\chi}(P)$ setzt. Daher ist die Anzahl der einfachen Charaktere erster Art von $\mathfrak{H}$ gleich der Anzahl der einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$, also gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in der Gruppe $\mathfrak{G}$. Haben nun die Zahlen $k_n, k'_n, l_n, l'_n, v_n, g_n$ und u_n dieselbe Bedeutung wie in §§ 8 und 10, so erhalten wir folgendes Resultat:

Die Anzahl der einfachen Charaktere zweiter Art ist für die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ gleich

*) Für einen einfachen Charakter ist diese Bedingung von selbst erfüllt.

$$k'_n - k_n = g_n + 2u_n = v_n + u_n$$

und für die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ *gleich*

$$l'_n - l_n = 2g_n + u_n = v_n + g_n .$$

Da die Charaktere der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ bereits bekannt sind (vgl. Einleitung), können wir die Charaktere erster Art von $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ beiseite lassen und haben uns nur mit den Charakteren zweiter Art zu beschäftigen.

§ 14. Aus jeder Darstellung A der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ durch homogene lineare Substitutionen (Matrizen) geht eine zweite Darstellung A' hervor, indem man die den Elementen von $\mathfrak{B}_n$ entsprechenden Matrizen von A ungeändert läßt, dagegen die übrig bleibenden negativ nimmt. Ich bezeichne A und A' als *assoziierte Darstellungen* und entsprechend die zugehörigen Charaktere als *assoziierte Charaktere* von $\mathfrak{T}_n$. Zwei assoziierte Charaktere $\chi(T)$ und $\chi'(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ sind also dadurch gekennzeichnet, daß

$$\chi'(T) = (-1)^\tau \chi(T)$$

wird, wo τ gleich Null oder Eins zu setzen ist, je nachdem T in $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist oder nicht. Wird insbesondere $\chi(T) = \chi'(T)$, also $\chi(T) = 0$ für alle in $\mathfrak{B}_n$ nicht vorkommenden Elemente T von $\mathfrak{T}_n$, so bezeichne ich $\chi(T)$ als *sich selbst assoziiert* oder auch als einen *zweiseitigen Charakter.*

Für einen einfachen nicht zweiseitigen Charakter $\chi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ wird auf Grund der Gleichungen (26.)

$$(29.) \qquad \Sigma\chi(T)\chi(T^{-1}) = 2n!, \quad \Sigma(-1)^\tau \chi(T)\chi(T^{-1}) = 0,$$

also

$$(30.) \qquad \Sigma\chi(B)\chi(B^{-1}) = n! .$$

Hierbei soll T alle Elemente von $\mathfrak{T}_n$ und B alle Elemente von $\mathfrak{B}_n$ durchlaufen. Dagegen wird für einen einfachen zweiseitigen Charakter $\chi(T)$

$$(31.) \qquad \Sigma\chi(B)\chi(B^{-1}) = 2n! .$$

Hieraus folgt, daß im ersten Falle die Zahlen $\chi(B) = \varphi(B)$ einen einfachen Charakter der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ repräsentieren; dagegen wird im zweiten Falle

$$\chi(B) = \psi(B) + \overline{\psi}(B),$$

wo $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ voneinander verschiedene einfache Charaktere von $\mathfrak{B}_n$ sind (vgl. die Formel (27.)). Man erkennt ferner leicht, daß zwei assoziierte Charaktere von $\mathfrak{T}_n$ entweder beide von der ersten Art oder beide von der zweiten Art sind. Ebenso gehören die Charaktere $\varphi(B)$, $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ zur ersten oder zur zweiten Art, je nachdem der Charakter $\chi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ ein Charakter erster oder zweiter Art ist.

Unter den $g_n + 2u_n$ einfachen Charakteren zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ seien nun r zweiseitig und $2s$ nicht zweiseitig. Da die letzteren Charaktere paarweise auftreten, so ist s eine ganze Zahl. Beachtet man nun, daß zu jedem Paar einander assoziierter Charaktere von $\mathfrak{T}_n$ nur ein einfacher Charakter von $\mathfrak{B}_n$ gehört, dagegen jedem zweiseitigen Charakter von $\mathfrak{T}_n$ zwei Charaktere von $\mathfrak{B}_n$ entsprechen, so erhält man im ganzen $2r+s$ einfache Charaktere zweiter Art von $\mathfrak{B}_n$. Man überzeugt sich auch durch Zuhilfenahme der Gleichungen (26.), daß diese $2r+s$ Charaktere voneinander verschieden sind; ferner ergibt sich aus einem Satze des Herrn *Frobenius**), daß dies die sämtlichen einfachen Charaktere zweiter Art von $\mathfrak{B}_n$ sind. Da nun die Anzahl dieser Charaktere gleich $2g_n + u_n$ ist, so ergibt sich

$$2r + s = 2g_n + u_n.$$

Andererseits ist aber

$$r + 2s = g_n + 2u_n,$$

folglich ist

$$r = g_n, \quad s = u_n, \quad r + s = g_n + u_n = v_n.$$

Die Anzahl der zweiseitigen (einfachen) Charaktere zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ ist also gleich der Anzahl der geraden Zerlegungen von n in lauter verschiedene Summanden.

Ich bemerke noch, daß die Anzahl der zweiseitigen Charaktere erster Art von $\mathfrak{T}_n$ gleich ist der Anzahl der Zerlegungen von n in lauter verschiedene ungerade Summanden**).

§ 15. Ist C irgendein Element von $\mathfrak{T}_n$, das nicht in $\mathfrak{B}_n$ vorkommt, z. B. das der Transposition $S_1 = (1,2)$ entsprechende Element T_1, so erhält man einen äußeren Automorphismus A von $\mathfrak{B}_n$, indem man dem Element B von $\mathfrak{B}_n$ das Element $\overline{B} = C^{-1}BC$ zuordnet. Aus jedem Charakter $\vartheta(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ geht daher, wie man unmittelbar erkennt, ein zweiter Charakter $\overline{\vartheta}(B)$ hervor, indem man

$$\overline{\vartheta}(B) = \vartheta(\overline{B})$$

setzt. Zwei solche Charaktere $\vartheta(B)$ und $\overline{\vartheta}(B)$ bezeichne ich als *adjungierte*

---

*) „Über die Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1898, S. 501.

**) Vgl. *Frobenius*, „Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe", § 6, und die Inaugural-Dissertation des Verfassers, § 23.

*Charaktere**). Man schließt auch sofort, daß, wenn $\vartheta(B)$ ein einfacher Charakter erster bzw. zweiter Art ist, $\overline{\vartheta}(B)$ dieselbe Eigenschaft besitzt.

Ich will nun zeigen, daß *die beiden aus einem zweiseitigen (einfachen) Charakter $\chi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ hervorgehenden Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ adjungierte Charaktere sind.*

Man betrachte nämlich eine zu $\chi(T)$ gehörende (irreduzible) Darstellung Δ von $\mathfrak{T}_n$ durch Matrizen des Grades $f=\chi(E)$. Die dem Element T entsprechende Matrix möge der Kürze wegen ebenfalls mit T bezeichnet werden. Da nun hier die zu Δ assoziierte Darstellung mit Δ äquivalent ist, so läßt sich eine Matrix H von nicht verschwindender Determinante angeben, so daß

$$H^{-1}TH=(-1)^{\tau}T \tag{32.}$$

wird; hierbei soll τ dieselbe Bedeutung haben wie auf S. 185. Hieraus ergibt sich, daß die Matrix H^2 mit allen Matrizen von Δ vertauschbar ist. Da nun Δ irreduzibel ist, so muß $H^2=aE_f$ sein, wo a eine Konstante und E_a allgemein die Einheitsmatrix a-ten Grades bedeuten soll. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a=1$ annehmen, so daß $H^2=E_f$ wird. Man kann daher eine Matrix M von nicht verschwindender Determinante wählen, so daß

$$M^{-1}HM=\begin{pmatrix}E_p & 0\\ 0 & -E_q\end{pmatrix}$$

wird, wo p und q gewisse positive ganze Zahlen bedeuten, deren Summe f ist. Ersetzt man nun die Matrizen T durch die Matrizen $M^{-1}TM$, so erhält man eine der Darstellung Δ äquivalente Darstellung, für welche die Matrix $M^{-1}HM$ dieselbe Rolle spielt wie die Matrix H bei der Darstellung Δ. Wir können daher annehmen, daß bereits

$$H=\begin{pmatrix}E_p & 0\\ 0 & -E_q\end{pmatrix}$$

sei. Aus den Gleichungen (32.) ergibt sich dann, daß, wenn die Elemente von $\mathfrak{T}_n$, die der Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ angehören, mit B, die übrigen mit C bezeichnet werden, in unserer Darstellung Δ die Matrizen B und C die Form haben

$$B=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & \overline{P}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & Q\\ \overline{Q} & 0\end{pmatrix},$$

---

*) Der Charakter $\overline{\vartheta}(B)$ ist von der Wahl des Elements C unabhängig.

wo P und $\overline{P}$ quadratische Matrizen der Grade p und q bedeuten, Q eine Matrix mit p Zeilen und q Spalten und $\overline{Q}$ eine Matrix mit q Zeilen und p Spalten ist. Wäre nun $p \neq q$, so würden die Determinanten der Matrizen C verschwinden, was nicht der Fall ist. Daher ist $p=q$ und also $f=2p$.

Die Matrizen P und $\overline{P}$ bilden offenbar zwei Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{B}_n$. Da wir aber wissen, daß $\chi(B)$ als Summe der beiden einfachen Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ erscheint, so müssen diese Darstellungen irreduzibel sein. Wir können annehmen, daß $\psi(B)$ die Spur der Matrix P und $\overline{\psi}(B)$ die Spur der Matrix $\overline{P}$ sei.

Es möge nun C insbesondere ein Element von $\mathfrak{T}_n$ sein, dem in $\mathfrak{S}_n$ eine Transposition, etwa die Transposition $S_1=(1,2)$ entspricht. Dann wird das Element C^2 gleich J, also die Matrix C^2 gleich jE_f, wo $j=\pm 1$ ist. Wir erhalten daher $Q\overline{Q}=\overline{Q}Q=jE_p$. Man erkennt nun leicht, daß sich die Darstellung Δ durch eine äquivalente Darstellung ersetzen läßt, in der

$$C=\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ jE_p & 0 \end{pmatrix}$$

wird, während H ungeändert bleibt. Hat nun aber C diese Form, so wird

$$C^{-1}BC=\begin{pmatrix} \overline{P} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt aber, wie zu beweisen ist, daß

$$(33.) \qquad \psi(C^{-1}BC)=\overline{\psi}(B), \quad \overline{\psi}(C^{-1}BC)=\psi(B)$$

wird.

§ 16. Ich setze noch

$$\delta(B)=\psi(B)-\overline{\psi}(B)$$

und bezeichne das System der $n!$ Zahlen $\delta(B)$ als das *Komplement des zweiseitigen Charakters* $\chi(T)$. Da man ψ und $\overline{\psi}$ vertauschen kann, so ist das Komplement $\delta(B)$ durch den Charakter $\chi(T)$ nur bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Dieses Vorzeichen ist aber für uns ohne Bedeutung. Denn, um die beiden Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ angeben zu können, genügt es, außer den Zahlen $\chi(J)$ entweder die Zahlen $\delta(B)$ oder die Zahlen $-\delta(B)$ zu kennen.

Die Zahl $\delta(B)$ ist offenbar nichts anderes als die Spur der Matrix HB. *Ist daher eine zu dem Charakter* $\chi(T)$ *gehörende Darstellung* Δ *bekannt, und ist* H *eine Matrix, die der Gleichung* $H^2=E_f$ *und außerdem den Be-*

dingungen (32.) *genügt, so hat man, um das Komplement des Charakters* $\chi(T)$ *zu bestimmen, nur die Spuren der Matrizen* HB *anzugeben.*

Ist $\chi(J) = jf$, so genügen die Zahlen $\delta(B)$ den Gleichungen

$$\delta(JB) = j\,\delta(B), \tag{34.}$$

ferner ist, wie aus der Formel (27.) folgt,

$$\sum_B \delta(B)\,\delta(B^{-1}) = 2n!. \tag{35.}$$

Für jedes Element C von $\mathfrak{T}_n$, das nicht in $\mathfrak{B}_n$ vorkommt, wird wegen (33.)

$$\delta(C^{-1}BC) = -\delta(B). \tag{36.}$$

Sind insbesondere $\bar{B} = C^{-1}BC$ und B auch in $\mathfrak{B}_n$ einander konjugiert, so wird

$$\delta(\bar{B}) = \delta(B) = 0. \tag{37.}$$

Nur dann, wenn B und $\bar{B}$ in dem in § 10 fixierten Sinne als adjungierte Elemente von $\mathfrak{B}_n$ zu bezeichnen sind, kann $\delta(B)$ nicht Null sein. *Daher ist das Komplement* $\delta(B)$ *nur für solche Elemente* B *von* $\mathfrak{B}_n$ *anzugeben, denen in der Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *Permutationen dritter Art entsprechen.*

Allgemeiner sei $\xi(T)$ ein beliebiger zusammengesetzter Charakter von $\mathfrak{T}_n$, der sich selbst assoziiert ist, für den also $\xi(T) = 0$ wird, sobald T nicht in $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist. Es kann dann auf unendlich viele verschiedene Arten

$$\xi(T) = r_\alpha \chi^{(\alpha)}(T) + r_\beta \chi^{(\beta)}(T) + \cdots + r_\nu \chi^{(\nu)}(T)$$

gesetzt werden, wo

$$\chi^{(\alpha)}(T),\ \chi^{(\beta)}(T), \ldots \tag{38.}$$

einfache, nicht notwendig voneinander verschiedene Charaktere von $\mathfrak{T}_n$ bedeuten, und $r_\alpha, r_\beta, \ldots r_\nu$ ganze Zahlen sind. Hierbei soll jedoch, wenn für $\xi(T)$ die Bedingung

$$\xi(J) = j\xi(E), \quad j = \pm 1$$

erfüllt ist, auch

$$\chi^{(\alpha)}(J) = j\chi^{(\alpha)}(E),\ \chi^{(\beta)}(J) = j\chi^{(\beta)}(E),\ \ldots\ \chi^{(\nu)}(J) = j\chi^{(\nu)}(E)$$

sein. — Sind nun etwa

$$\chi^{(\alpha)}(T),\ \chi^{(\beta)}(T),\ \ldots\ \chi^{(\varkappa)}(T)$$

die sämtlichen zweiseitigen unter den Charakteren (38.) und kennt man zu ihnen gehörende Komplemente,

$$\delta^{(\alpha)}(B),\ \delta^{(\beta)}(B),\ \ldots\ \delta^{(\varkappa)}(B),$$

so bezeichne ich *als ein Komplement des zweiseitigen Charakters* $\xi(T)$ *jedes System von Zahlen*

$$\delta(B) = \varepsilon_\alpha r_\alpha \delta^{(\alpha)}(B) + \varepsilon_\beta r_\beta \delta^{(\beta)}(B) + \cdots + \varepsilon_\varkappa r_\varkappa \delta^{(\varkappa)}(B),$$

wo $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \ldots \varepsilon_\varkappa$ die Werte ± 1 haben*).

Zu jedem zweiseitigen Charakter $\xi(T)$ gehören also unendlich viele Komplemente. In jedem Fall genügen aber die Zahlen $\delta(B)$ den Bedingungen (36.)—(37.); ferner erhält man, wie leicht zu sehen ist, zwei adjungierte (zusammengesetzte) Charaktere $\vartheta(B)$ und $\bar{\vartheta}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$, deren Summe $\xi(B)$ ist, indem man

$$\vartheta(B) = \frac{1}{2}[\xi(B) + \delta(B)], \quad \bar{\vartheta}(B) = \frac{1}{2}[\xi(B) - \delta(B)]$$

setzt. Ist insbesondere $\xi(T) = \chi(T)$ ein einfacher Charakter, so werden $\vartheta(B)$ und $\bar{\vartheta}(B)$ nur dann *eigentliche* Charaktere von $\mathfrak{B}_n$, wenn

$$\delta(B) = \pm[\psi(B) - \bar{\psi}(B)]$$

wird, wo $\psi(B)$ und $\bar{\psi}(B)$ dieselbe Bedeutung haben wie früher. Diese beiden ausgezeichneten Komplemente von $\chi(T)$ betrachten wir, wie schon vorhin erwähnt, als nicht wesentlich voneinander verschieden. Wenn wir im folgenden von *dem* Komplement eines einfachen zweiseitigen Charakters sprechen, so verstehen wir hierunter eins von diesen beiden Komplementen.

§ 17. Ist $\chi(T)$ ein beliebiger Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$, so wird für jede Permutation P von $\mathfrak{S}_n$, wenn P' das nach den Vorschriften des § 11 zu bestimmende Element von $\mathfrak{T}_n$ ist,

$$\chi(JP') = -\chi(P').$$

Da ferner für eine Permutation P, die zur ersten Art gehört, P' und JP' konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ sind und also $\chi(JP') = \chi(P')$ wird, so ist für jede Permutation erster Art

$$\chi(JP') = \chi(P') = 0.$$

Es genügt daher, wenn $\chi(T)$ ein Charakter zweiter Art ist, allein die Zahlen $\chi(P')$ und zwar nur für die Permutationen zweiter Art anzugeben.

Da wir ferner die Elemente P' so gewählt haben, daß zwei konjugierten Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ auch zwei konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ entsprechen, so ist die Zahl $\chi(P')$ allein durch die Klasse ähnlicher Permutationen von $\mathfrak{S}_n$, der P angehört, bestimmt.

Eine solche Klasse nenne ich gerade oder ungerade, je nachdem ihre Permutationen gerade oder ungerade sind. Mit $[\alpha]$ bezeichne ich eine

*) Kommt unter den Charakteren (38.) kein zweiseitiger Charakter vor, so sage ich, *das Komplement von $\xi(T)$ sei Null.*

Klasse, deren Permutationen in lauter Zykeln ungerader Ordnung zerfallen. Kommen unter den Zykeln einer Permutation P von $[\alpha]$ genau α_1 Zykeln der Ordnung 1, ferner α_3 Zykeln der Ordnung 3 vor usw., so setze ich

$$[\alpha]=[\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots] \text{ und } \chi(P')=\chi_\alpha=\chi_{\alpha_1,\alpha_3,\ldots}.$$

Die Klasse $[\alpha]$ enthält

$$h_\alpha=\frac{n!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\ 3^{\alpha_3}\alpha_3!\cdots}$$

Permutationen, und diese Zahl gibt zugleich die Anzahl der mit P' konjugierten Elemente von $\mathfrak{T}_n$ an. Die Anzahl der Klassen $[\alpha]$ ist gleich der von uns mit v_n bezeichneten Zahl. Beachtet man noch, daß P und P^{-1} ähnliche Permutationen sind und daß die Ordnung von P eine ungerade Zahl ist, so erkennt man, daß auch P' und P'^{-1} konjugierte Elemente von $\mathfrak{T}_n$ sind. Daher ist in unserem Fall $\chi(P')=\chi(P'^{-1})$, und *folglich sind die Zahlen* χ_α *sämtlich reell**). Ist insbesondere $\chi(T)$ ein *einfacher* Charakter zweiter Art, so folgt aus den Gleichungen (30.) und (31.)

$$\text{(39.)}\qquad \Sigma h_\alpha \chi_\alpha^2=\frac{n!}{2^\varepsilon},$$

wo die Summe über alle v_n Klassen $[\alpha]$ zu erstrecken ist und ε den Wert Null oder Eins hat, je nachdem $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter ist oder nicht. Ebenso ergibt sich aus den Formeln (26.), daß für je zwei verschiedene einfache Charaktere $\chi(T)$ und $\chi'(T)$, die nicht einander assoziiert sind,

$$\text{(40.)}\qquad \Sigma h_\alpha \chi_\alpha \chi'_\alpha=0$$

ist.

Neben den Klassen $[\alpha]$, die alle geraden Permutationen zweiter Art umfassen, haben wir nur noch diejenigen Klassen von $\mathfrak{S}_n$ zu betrachten, deren Permutationen in Zykeln von lauter verschiedenen Ordnungen zerfallen. Eine solche Klasse bezeichne ich mit $(\nu), (\varrho),\ldots$ und setze, wenn eine Permutation P von (ν) genau m Zykeln der Ordnungen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_m \qquad (\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_m>1)$$

enthält,

$$\text{(41.)}\qquad (\nu)=(\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_m)$$

und

---

*) Allgemein sind für jeden Charakter $\chi(T)$ und $\chi(T^{-1})$ konjugiert komplexe Zahlen. — Man kann auch leicht schließen, daß die Zahlen χ_α sämtlich ganze rationale Zahlen sind; doch werden wir dies später auf anderem Wege erkennen.

$$\chi(P') = \chi_{(\nu)} = \chi_{(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m)}.$$

Die Anzahl der Klassen (ν) ist ebenfalls gleich v_n, doch sind diejenigen unter ihnen, für welche $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$ ungerade Zahlen sind, zugleich auch unter den Klassen $[\alpha]$ enthalten. Die Zahlen $\chi_{(\nu)}$ sind nur für die u_n *ungeraden* Klassen (ν) anzugeben, da die übrigen entweder unter den Zahlen χ_α vorkommen oder von selbst Null sind. Ist $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter, so wird $\chi_{(\nu)}$ auch für jede ungerade Klasse (ν) gleich Null. In diesem Fall werden wir im folgenden zumeist wenigstens ein Komplement $\delta(B)$ von $\chi(T)$ anzugeben haben. Bedeutet P die Permutation

$$(1, 2, \dots \nu_1)\,(\nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \dots \nu_1 + \nu_2)\,\cdots$$

der Klasse (41.), und ist P' das auf S. 180 fixierte Element von $\mathfrak{T}_n$, so setze ich, wenn (ν) eine *gerade* Klasse ist,

$$\delta(P') = \delta_{(\nu)} = \delta_{(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m)}.$$

Kennt man für alle g_n geraden Klassen (ν) die Zahlen $\delta_{(\nu)}$, so kann man auf Grund der Formeln (34.)—(37.) *auch alle übrigen Zahlen $\delta(B)$ angeben.* Hierbei ist in unserem Fall in (34.) für j die Zahl -1 zu setzen.

Bezeichnet man die Anzahl $\dfrac{n!}{\nu_1\, \nu_2 \cdots \nu_m}$ der Permutationen der Klasse (41.) mit $h_{(\nu)}$, so erhält man insbesondere für einen *einfachen* Charakter zweiter Art, der nicht zweiseitig ist, aus (29.) die Gleichung

$$\sum h_{(\nu)}\, \chi_{(\nu)}\, \bar{\chi}_{(\nu)} = \frac{n!}{2}; \tag{42.}$$

ebenso ergibt sich wegen (35.) für das Komplement eines zweiseitigen Charakters zweiter Art

$$\sum h_{(\nu)}\, \delta_{(\nu)}\, \bar{\delta}_{(\nu)} = n!. \tag{43.}$$

Hierbei ist in der ersten Formel die Summe über alle ungeraden Klassen (ν) und in der zweiten Formel über alle geraden Klassen (ν) zu erstrecken, ferner sind unter $\bar{\chi}_{(\nu)}$ und $\bar{\delta}_{(\nu)}$ die zu $\chi_{(\nu)}$ und $\delta_{(\nu)}$ konjugiert komplexen Zahlen zu verstehen.

Ich leite noch zwei Formeln ab, die für das folgende von Wichtigkeit sind.

Allgemein ist für jede Permutation P von $\mathfrak{S}_n$

$$\sum_\chi \chi(P')\, \chi(P'^{-1}) = \frac{2\, n!}{h_P},$$

wo die Summe über alle einfachen Charaktere erster und zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ zu erstrecken ist und h_P die Anzahl der mit P' konjugierten

Elemente von $\mathfrak{T}_n$ bedeutet*). Ist nun P eine Permutation zweiter Art, so ist h_P zugleich die Anzahl der mit P ähnlichen Permutationen von $\mathfrak{S}_n$. Da nun für jeden Charakter erster Art die $n!$ Zahlen $\chi(P') = \chi(P)$ einen Charakter von $\mathfrak{S}_n$ bilden, so wird

$$\sum_{\chi}' \chi(P')\chi(P'^{-1}) = \frac{n!}{h_P},$$

wo hier die Summe über alle Charaktere erster Art zu erstrecken ist. Daher wird auch

$$\sum_{\chi}'' \chi(P')\chi(P'^{-1}) = \frac{n!}{h_P},$$

wo χ alle $v_n + u_n$ Charaktere zweiter Art durchläuft. Man bezeichne nun mit

$$\chi^{(1)}(T),\ \chi^{(2)}(T),\ \dots\ \chi^{(v_n)}(T)$$

v_n einfache Charaktere zweiter Art, von denen nicht zwei einander assoziiert sind; ferner sei ε_ϱ gleich Null oder Eins, je nachdem $\chi^{(\varrho)}(T)$ ein zweiseitiger oder ein nicht zweiseitiger Charakter ist. Dann kann die zuletzt erhaltene Formel für den Fall, daß P der Klasse $[\alpha]$ angehört, in der Form

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \chi_\alpha^{(\varrho)2} = \frac{n!}{h_\alpha} \tag{44.}$$

geschrieben werden. Sind dagegen $[\alpha]$ und $[\beta]$ zwei verschiedene Klassen, so erhält man in ähnlicher Weise

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\beta^{(\varrho)} = 0. \tag{45.}$$

Abschnitt V.

Über die zu den Charakteren der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ gehörenden Kollineationsgruppen.

§ 18. Es bedeute, wie in § 13, $\mathfrak{H}$ eine der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ oder $\mathfrak{B}_n$ und entsprechend sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$. Ist g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, so wird also die Ordnung h von $\mathfrak{H}$ gleich $2g$.

Man betrachte wieder einen einfachen Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{H}$ und eine zu $\chi(R)$ gehörende Darstellung Δ von $\mathfrak{H}$ durch Matrizen (R). Ist P irgendeine Permutation von $\mathfrak{G}$, so bezeichne man die durch die Matrizen

*) Dies ist eine der Grundformeln der Theorie der Gruppencharaktere. Vgl. etwa meine auf S. 183 zitierte Arbeit „Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere“, Formel (XIV.).

(P') und (JP') bestimmte Kollineation mit $\{P\}$ und die durch diese Kollineationen erzeugte Gruppe mit $\mathfrak{R}$.

Es ist nun zunächst zu beachten, daß, wenn $n \geqq 4$ und $\chi(R)$ ein Charakter *zweiter* Art ist, die g Kollineationen $\{P\}$ voneinander verschieden sein müssen. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte es mindestens eine von E verschiedene Permutation P geben, für die $\{P\} = \{E\}$ wird, und diese Permutationen würden eine invariante Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ bilden. Ist nun zunächst $n > 4$, so müßte, da $\mathfrak{A}_n$ alsdann eine einfache Gruppe ist und $\mathfrak{S}_n$ nur die eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}_n$ enthält, entweder $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_n$ sein. Für $n = 4$ käme für $\mathfrak{F}$ aber noch die durch die Permutationen

$$E,\ A = (1,2)\,(3,4),\ B = (1,3)\,(2,4),\ C = (1,4)\,(2,3)$$

gebildete Vierergruppe in Betracht. In jedem Fall würde also $\mathfrak{F}$ die Permutationen A und B enthalten. Für die zugehörigen Elemente A' und B' von $\mathfrak{H}$ müßten sich dann in unserer Darstellung $\mathcal{A}$ die Matrizen (A') und (B') nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden und folglich untereinander vertauschbar sein. Es ist aber, wenn $T_1, T_2, \ldots$ die die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ erzeugenden Elemente sind,

$$A' = J^{\alpha} T_1 T_3,\ B' = J^{\beta} T_2 T_1 T_3 T_2,$$

und es wird $A'B' = JB'A'$. Da nun auf Grund unserer Voraussetzung über den Charakter $\chi(R)$ jedenfalls $(J) = -(E)$ wird, so ergibt sich $(A')(B') = -(B')(A')$, was auf einen Widerspruch führt.

Daher ist die zu einem Charakter zweiter Art von $\mathfrak{H}$ gehörende Kollineationsgruppe $\mathfrak{R}$ für $n \geqq 4$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ stets einstufig isomorph.

In ähnlicher Weise schließt man, daß für einen einfachen Charakter erster Art von $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{R}$ nur dann der Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einstufig isomorph ist, wenn entweder der Grad f des Charakters gleich Eins oder $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_4$ und $f = 2$ ist.

§ 19. Es sei noch $\bar{\chi}(R)$ ein von $\chi(R)$ verschiedener einfacher Charakter von $\mathfrak{H}$, dem die Darstellung $\bar{\mathcal{A}}$ von $\mathfrak{H}$ durch die Matrizen $(\bar{R})$ entsprechen möge. Die zugehörige Kollineationsgruppe möge mit $\bar{\mathfrak{R}}$ bezeichnet werden, ferner sei $\{\bar{P}\}$ die der Permutation P von $\mathfrak{G}$ entsprechende Substitution von $\bar{\mathfrak{R}}$.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen es eintreten kann, daß die Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$, abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente, übereinstimmen.

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Es sei zunächst $\{\bar{P}\} = \{P\}$ für jede Permutation P von $\mathfrak{G}$. Dann unterscheiden sich die Koeffizientenmatrizen dieser beiden Kollineationen nur um einen Zahlenfaktor, und hieraus folgt, daß für jedes Element R von $\mathfrak{H}$

$$(\bar{R}) = \zeta_R \cdot (R)$$

also auch

$$\bar{\chi}(R) = \zeta_R \cdot \chi(R) \tag{46.}$$

wird, wo die ζ_R gewisse Zahlen bedeuten. Aus der ersten Gleichung folgt für je zwei Elemente R und S von $\mathfrak{H}$

$$\zeta_R \zeta_S = \zeta_{RS},$$

d. h. die Zahlen ζ_R bilden einen linearen Charakter von $\mathfrak{H}$*). Ist nun $\mathfrak{H} = \mathfrak{T}_n$, so ist der Kommutator von $\mathfrak{H}$ die Untergruppe $\mathfrak{B}_n$, deren Index gleich 2 ist. Es gibt daher außer dem Hauptcharakter $\zeta_R = 1$, der für uns nicht in Betracht kommt, nur noch einen linearen Charakter, den man dadurch erhält, daß man $\zeta_R = 1$ oder $\zeta_R = -1$ setzt, je nachdem R in $\mathfrak{B}_n$ vorkommt oder nicht. Die Gleichung (46.) lehrt uns dann, daß χ *und* $\bar{\chi}$ *assoziierte Charaktere werden.* Umgekehrt schließt man unmittelbar, *daß die zu zwei assoziierten Charakteren von* $\mathfrak{T}_n$ *gehörenden Kollineationsgruppen als nicht voneinander verschieden anzusehen sind.*

Es sei jetzt $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{B}_n$. Ist dann $n > 4$, so umfaßt der Kommutator von $\mathfrak{B}_n$ alle Elemente der Gruppe, und folglich hat $\mathfrak{B}_n$ nur den einen linearen Charakter $\zeta_R = 1$, der für uns wieder auszuschließen ist. Ist aber $n = 4$, so besitzt $\mathfrak{B}_n$ drei lineare Charaktere $\zeta_0(R), \zeta_1(R), \zeta_2(R)$, die dadurch bestimmt sind, daß

$$\zeta_a(T_2 T_1) = \varrho^a, \quad \zeta_a(T_3 T_1) = 1$$

wird, wo ϱ eine primitive dritte Einheitswurzel ist. Die Gruppe $\mathfrak{B}_4$ bildet also hier eine Ausnahme, was im folgenden zu berücksichtigen sein wird.

b) Es möge nun die Substitution $\{\bar{P}\}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ der Substitution $\{P_1\}$ von $\mathfrak{R}$ gleich sein, wo P_1 eine Permutation von $\mathfrak{G}$ bedeutet, die nicht immer gleich P ist. Offenbar erhalten wir dann einen Automorphismus A von $\mathfrak{G}$, wenn wir der Permutation P die Permutation P_1 zuordnen. Ist nun zunächst A ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{G}$, so gibt es in $\mathfrak{G}$ eine

---

*) Vgl. *Frobenius* „Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1896, S. 1343.

Permutation H, für die $H^{-1}PH = P_1$ wird. Dann wird man aber auf den zuerst behandelten Fall geführt, indem man $\mathfrak{R}$ durch die ihr äquivalente Gruppe ersetzt, die aus $\mathfrak{R}$ durch die lineare Transformation $|H|$ hervorgeht.

Es sei also A ein äußerer Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$, so kommt, da $\mathfrak{S}_n$ für $n \neq 6$ eine vollkommene Gruppe ist, nur der Fall $n=6$ in Betracht, auf den ich später zurückkommen werde. Es sei demnach $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$. Wenn dann wieder $n \neq 6$ ist, so kann A nur ein Automorphismus sein, der dadurch erhalten wird, daß man alle Permutationen von $\mathfrak{A}_n$ mit Hilfe einer ungeraden Permutation U transformiert. Dann wird also $P_1 = U^{-1}PU$; nach Voraussetzung stimmen also die Kollineationen $|U^{-1}PU|$ und $|\bar{P}|$ überein. Bezeichnet man nun das zu U gehörende Element U' von $\mathfrak{T}_n$ mit C, so erkennt man, daß die Darstellungen $\mathcal{A}$ und $\bar{\mathcal{A}}$ der Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_n$ in der Weise zusammenhängen, daß für jedes Element R von $\mathfrak{B}_n$

$$(47.) \qquad (C^{-1}RC) = \zeta_R \cdot (\bar{R})$$

wird, wo ζ_R eine Konstante bedeutet. Diese Zahlen ζ_R müssen dann wieder einen linearen Charakter von $\mathfrak{B}_n$ bilden. Läßt man aber den Fall $n=4$, der sich leicht direkt erledigen läßt, beiseite, so ergibt sich nach dem früheren, daß $\zeta_R = 1$ sein muß. Aus der Gleichung (47.) folgt dann

$$\chi(C^{-1}RC) = \bar{\chi}(R),$$

d. h. χ und $\bar{\chi}$ sind adjungierte Charaktere von $\mathfrak{B}_n$ (vgl. § 15). Umgekehrt schließt man leicht, *daß, wenn χ und $\bar{\chi}$ adjungierte Charaktere von $\mathfrak{B}_n$ sind, die Gruppe $\mathfrak{R}$ in die Gruppe $\bar{\mathfrak{R}}$ oder in eine mit $\bar{\mathfrak{R}}$ äquivalente Gruppe übergeht, wenn man die Elemente von $\mathfrak{R}$ auf Grund des Automorphismus A von $\mathfrak{A}_n$ permutiert.* — Ich bezeichne in diesem Fall die Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ als *adjungierte Gruppen* (vgl. Einleitung).

In dem im vorhergehenden ausgeschlossenen Fall $n = 6$ kommt sowohl bei der Gruppe $\mathfrak{S}_6$ als auch bei der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ noch der bekannte Automorphismus A in Betracht, durch den jedem Zyklus dritter Ordnung eine Permutation der Form $(\alpha\beta\gamma)(\delta\varepsilon\eta)$ zugeordnet wird. Wir werden auch später sehen, daß bei jeder der Gruppen $\mathfrak{T}_6$ und $\mathfrak{B}_6$ gewisse Paare von Charakteren χ und $\bar{\chi}$ vorhanden sind, für welche die zugehörigen Kollineationsgruppen vermittelst des Automorphismus A ineinander übergehen.

§ 20. Will man nur diejenigen irreduziblen Kollineationsgruppen kennen, die den Gruppen $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ isomorph sind und sich nicht als

Gruppen von $n!$, bzw. $\frac{n!}{2}$ homogenen linearen Substitutionen schreiben lassen, so hat man nur die einfachen Charaktere zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ oder $\mathfrak{B}_n$ zu berücksichtigen. Außerdem sind nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen bei der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ zwei assoziierte und bei der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ zwei adjungierte Charaktere als nicht wesentlich verschieden anzusehen. Beachtet man noch die im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultate über die Anzahl der Charaktere zweiter Art bei den Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$, so erhält man den in der Einleitung angekündigten Satz:

VI. *Ist n größer als drei und von sechs verschieden, so ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Kollineationsgruppen, die der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorph sind und nicht als Gruppen von $n!$ homogenen linearen Substitutionen geschrieben werden können, gleich der Anzahl v_n der Zerlegungen von n in lauter verschiedene Summanden. Ist n größer als vier und von sechs und sieben verschieden, so ist die entsprechende Anzahl für die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ebenfalls gleich der Zahl v_n.*

Die Gruppe $\mathfrak{S}_6$ tritt wegen des Bestehens des oben erwähnten äußeren Automorphismus als Ausnahme auf. Für diese Gruppe sind, wie ich schon in der Einleitung hervorgehoben habe, von den $v_6=4$ dem allgemeinen Fall entsprechenden Kollineationsgruppen nur drei wesentlich verschieden. Bei der Gruppe $\mathfrak{A}_4$ reduzieren sich die $v_4=2$ Kollineationsgruppen (des Grades 2) infolge des Auftretens linearer Charaktere bei der Gruppe $\mathfrak{B}_4$ auf nur eine Gruppe. Die Fälle $n=6$ und $n=7$ spielen aber für die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ eine ausgezeichnete Rolle, weil die Gruppen $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{B}_7$ nicht mehr als die Darstellungsgruppen von $\mathfrak{A}_6$ und $\mathfrak{A}_7$ erscheinen.

Abschnitt VI.

Die Hauptdarstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$.

§ 21. In diesem Abschnitt soll die bereits in der Einleitung erwähnte mit der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorphe Kollineationsgruppe des Grades $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ aufgestellt und genauer untersucht werden.

Sind

$$A=(a_{\varkappa\lambda}),\quad B=(b_{\mu\nu})$$

zwei Matrizen der Grade p und q, so soll die Matrix des Grades pq

$$\begin{pmatrix} a_{11}B, & a_{12}B, & \dots a_{1p}B \\ a_{21}B, & a_{22}B, & \dots a_{2p}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}B, & a_{p2}B, & \dots a_{pp}B \end{pmatrix}$$

mit $A \times B$ bezeichnet werden. Ist C eine dritte Matrix des Grades r, so ist

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Diese Matrix des Grades pqr bezeichnet man mit $A \times B \times C$. In analoger Weise ist für m Matrizen $A_1, A_2, \dots A_m$, deren Grade beliebig sein können, das Zeichen

$$(48.) \qquad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$$

zu definieren. Sind $A_1, A_2, \dots A_m$ gleich einer Matrix A, so bezeichne ich die Matrix (48.) mit $\Pi_m A$. Die Spur der Matrix (48.) ist gleich dem Produkt der Spuren der Matrizen $A_1, A_2, \dots A_m$. Sind ferner $B_1, B_2, \dots B_m$ beliebige m andere Matrizen und ist hierbei B_μ von demselben Grade wie A_μ, so wird

$$(49.) \quad (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m)(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m) = A_1 B_1 \times A_2 B_2 \times \cdots \times A_m B_m \text{*}).$$

Man betrachte nun die vier Matrizen zweiten Grades

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zwischen diesen Matrizen bestehen folgende Beziehungen:

$$(50.) \quad \begin{cases} A^2 = F, \ B^2 = -F, \ C^2 = F, \\ AB = -BA = -C, \ BC = -CB = -A, \ CA = -AC = B, \\ CBA = F. \end{cases}$$

Man bilde nun für ein beliebiges m die Matrizen des Grades 2^m

$$M_1 = \Pi_m A, \ M_2 = \Pi_{m-1} A \times B, \ M_3 = \Pi_{m-1} A \times C, \dots$$
$$M_{2\nu} = \Pi_{m-\nu} A \times B \times \Pi_{\nu-1} F, \ M_{2\nu+1} = \Pi_{m-\nu} A \times C \times \Pi_{\nu-1} F, \dots$$
$$M_{2m} = B \times \Pi_{m-1} F, \ M_{2m+1} = C \times \Pi_{m-1} F.$$

Diese $2m+1$ Matrizen genügen, wie man auf Grund der Formeln (49.) und (50.) leicht erkennt, den Gleichungen

$$(51.) \qquad M_{2\nu}^2 = -E, \ M_{2\nu+1}^2 = E,$$

$$(52.) \qquad M_\varkappa M_\lambda = -M_\lambda M_\varkappa, \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

$$(53.) \qquad M_{2m+1} M_{2m} \cdots M_2 M_1 = E,$$

wo $E = \Pi_m F$ die Einheitsmatrix des Grades 2^m bedeutet.

---

*) Vgl. *A. Hurwitz*, „Zur Invariantentheorie“, Math. Ann. Bd. 45, S. 381, und meine Dissertation, § 6.

Aus den Gleichungen (51.) und (52.) ergibt sich, daß jedes Produkt der $2m$ Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{2m}$, abgesehen vom Vorzeichen, gleich wird einer der

$$1+\binom{2m}{1}+\binom{2m}{2}+\cdots+\binom{2m}{2m}=2^{2m}$$

Matrizen

(54.) $$E, M_1, M_2, \dots M_{2m}, M_1 M_2, M_1 M_3, \dots M_{2m-1} M_{2m}, \dots M_1 M_2 \dots M_{2m}.$$

Man erkennt auch ohne Mühe, daß diese Matrizen, abgesehen von den Vorzeichen, mit den 4^m Matrizen übereinstimmen, die man dadurch erhält, daß man in (48.) für $A_1, A_2, \dots A_m$ auf alle möglichen Arten die vier Matrizen F, A, B, C einsetzt. Da nun die Spuren von A, B, C gleich Null sind, so ergibt sich, daß unter den Matrizen (54.), die auch kurz mit $X_0, X_1, X_2, \dots$ bezeichnet werden mögen, nur die erste eine von Null verschiedene Spur besitzt; die Spur von $X_0 = E$ ist aber gleich 2^m. Die Matrizen $X_0, X_1, X_2, \dots$ reproduzieren sich ferner, abgesehen von den Vorzeichen, durch Multiplikation, und zwar ist

$$X_\varkappa^2 = \pm E, \quad X_\varkappa X_\lambda = \pm X_\mu,$$

wo μ von Null verschieden ist.

Hieraus folgt leicht, daß $X_0, X_1, X_2, \dots$ untereinander linear unabhängig sind. Denn ist etwa

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots = 0,$$

so erhält man nach Multiplikation mit $X_\varkappa$

$$a_0 X_0 X_\varkappa + \cdots + a_{\varkappa-1} X_{\varkappa-1} X_\varkappa \pm a_\varkappa E + a_{\varkappa+1} X_{\varkappa+1} X_\varkappa + \cdots = 0.$$

Da nun die Spur der links stehenden Matrix offenbar gleich $\pm 2^m a_\varkappa$ ist, so muß $a_\varkappa = 0$ sein. Beachtet man noch, daß die Anzahl der Matrizen $X_0, X_1, X_2, \dots$ gleich ist dem Quadrat ihres Grades, so erkennt man, daß *jede* Matrix des Grades 2^m als lineare homogene Verbindung von $X_0, X_1, X_2, \dots$ darstellbar ist. *Daher erzeugen die Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{2m}$ eine irreduzible Gruppe**).

§ 22. Mit Hülfe der Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{2m+1}$ gelingt es nun, eine Darstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ zu bilden.

Ich setze unter der Annahme, daß $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, also $n = 2m+1$ oder $n = 2m+2$ ist,

(55.) $$T_\lambda = a_{\lambda-1} M_{\lambda-1} + b_\lambda M_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n-1)$$

*) Diese Gruppe ist eine endliche Gruppe der Ordnung 2^{2m+1}.

wo

$$a_{2\nu} = -\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2\nu+1}}, \quad b_{2\nu+1} = \frac{i\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{2\nu+1}},$$

$$a_{2\nu+1} = -\frac{i\sqrt{2\nu+1}}{2\sqrt{\nu+1}}, \quad b_{2\nu+2} = \frac{\sqrt{2\nu+3}}{2\sqrt{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sein soll; hierbei sind alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen. Es wird also

$$T_1 = iM_1, \quad T_2 = -\frac{i}{2}M_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}M_2, \quad T_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}M_2 + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}M_3, \quad \ldots .$$

Die Größen a_λ und b_λ genügen den Gleichungen

$$b_\lambda^2 - a_{\lambda-1}^2 = (-1)^\lambda, \quad a_\lambda b_\lambda = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der Formeln (51.) und (52.) verifiziert man ohne Mühe die Relationen

$$(56.) \quad T_\alpha^2 = -E, \quad T_\beta T_{\beta+1} + T_{\beta+1} T_\beta = E, \quad T_\gamma T_\delta = -T_\delta T_\gamma, \quad \left\{\begin{array}{l}\alpha = 1, 2, \ldots n-1, \\ \beta = 1, 2, \ldots n-2, \\ \gamma = 1, 2, \ldots n-3, \\ \delta \geqq \gamma+2\end{array}\right\}$$

und hieraus folgt leicht

$$(T_\beta T_{\beta+1})^3 = -E.$$

Setzt man noch $J = -E$, so erkennt man, daß die Matrizen $J, T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ den die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ definierenden Relationen (II.) genügen. Folglich erzeugen sie eine Darstellung von $\mathfrak{T}_n$ durch Matrizen des Grades $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, und da hier $J = -E$ ist, so ist dies eine Darstellung zweiter Art. Ich bezeichne diese Darstellung im folgenden mit Δ_n und nenne sie die *Hauptdarstellung zweiter Art der Gruppe* $\mathfrak{T}_n$.

Daß die Darstellung Δ_n irreduzibel ist, erkennt man folgendermaßen: Da $T_1 = iM_1$ ist, so läßt sich offenbar jede der Matrizen $M_1, M_2, \ldots M_{2m}$ als lineare homogene Verbindung von $T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ darstellen. Wäre nun die durch die T_α erzeugte Gruppe reduzibel, so müßte auch die durch die M_α erzeugte Gruppe reduzibel sein. Dies ist aber, wie wir gesehen haben, nicht der Fall.

Die Gleichungen (56.) geben noch Anlaß zu folgender Betrachtung. Allein unter Benutzung dieser Gleichungen kann man offenbar jedes Produkt $T_\alpha T_\beta T_\gamma \cdots$ als lineare homogene Verbindung der 2^{n-1} speziellen Produkte

$$(57.) \quad E, \; T_1, \ldots T_{n-1}, \; T_1 T_2, T_1 T_3, \ldots T_{n-2} T_{n-1}, \; T_1 T_2 T_3, \ldots T_1 T_2 \cdots T_{n-1}$$

darstellen, wobei als Koeffizienten nur ganze Zahlen in Betracht kommen. Aus den Gleichungen (56.) läßt sich ferner keine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen den Produkten (57.) ableiten.

In der Tat lassen sich doch die Gleichungen (56.) durch die Matrizen (55.) befriedigen. Unter den linearen Verbindungen der Produkte dieser Matrizen kommen aber, wie wir gesehen haben, die M_α und folglich auch die 2^{2m} linear unabhängigen Matrizen (54.) vor. Ist nun n ungerade, so wird $2^{2m} = 2^{n-1}$, und daher können in diesem Fall die 2^{n-1} Produkte (57.) gewiß nicht linear abhängig sein. Ist n aber gerade, so denke man sich zu den Elementen $T_1, T_2, \dots T_{n-1}$ noch ein weiteres Element T_n hinzugefügt und nehme zu den Gleichungen (56.) noch die Gleichungen

$$(58.) \qquad T_n^2 = -E, \; T_{n-1} T_n + T_n T_{n-1} = E, \; T_\beta T_n = -T_n T_\beta \quad (\beta = 1, 2, \dots n-2)$$

hinzu. Da nun, weil $n+1$ ungerade ist, aus den Gleichungen (56.) und (58.) keine lineare homogene Relation zwischen den 2^n Produkten

$$E, \; T_1, \dots T_n, \; T_1 T_2, \dots T_{n-1} T_n, \; T_1 T_2 T_3, \dots T_1 T_2 \dots T_n$$

folgen kann, so läßt sich a fortiori aus (56.) keine Relation zwischen den Produkten (57.) ableiten.

Bezeichnet man nun die Produkte (57.) mit

$$A_1, A_2, \dots A_{2^{n-1}},$$

so ergeben sich speziell aus (56.) Gleichungen der Form

$$A_\varkappa T_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{2^{n-1}} t_{\varkappa\lambda}^{(\alpha)} A_\lambda,$$

wo die $t_{\varkappa\lambda}^{(\alpha)}$ gewisse ganze Zahlen bedeuten. Die Matrizen

$$\overline{T}_\alpha = (t_{\varkappa\lambda}^{(\alpha)})$$

des Grades 2^{n-1} erzeugen dann offenbar eine mit der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ (einstufig) isomorphe Gruppe:

Die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ läßt sich als lineare homogene Gruppe des Grades 2^{n-1} mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

§ 23. Es soll nun der zu der Darstellung Δ_n gehörende (einfache) Charakter $\chi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$, den ich als den *Hauptcharakter zweiter Art* bezeichne, berechnet werden.

Ich schicke folgende Bemerkung voraus: Es sei X eine Matrix der Form $xE + \Sigma x_\alpha P_\alpha$, wo die P_α Produkte gewisser k unter den Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{2m}$ sind. Ebenso sei $Y = yE + \Sigma y_\beta Q_\beta$, wo jedes Q_β ein Produkt von gewissen l anderen unter diesen Matrizen ist. Hierbei soll keines der Produkte P_α und Q_β gleich $\pm E$ sein. Dann sind auch die Produkte $P_\alpha Q_\beta$ sämtlich von $\pm E$ verschieden. Daher sind nach den Ausführungen des § 21 die Spuren aller Matrizen P_α, Q_β, $P_\alpha Q_\beta$ gleich Null. Da nun die

Spur der Einheitsmatrix E des Grades 2^m gleich 2^m ist, so ergibt sich, *daß die Spuren der Matrizen* X, Y, XY *die Werte* $2^m x$, $2^m y$, $2^m xy$ *besitzen.*

Es sei nun P eine aus ϱ Zykeln bestehende Permutation (zweiter Art) der Form

$$(59.) \qquad (1,2,\dots\lambda_1)(\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots\lambda_1+\lambda_2)\cdots,$$

wobei wir $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$ annehmen. Dieser Permutation von $\mathfrak{S}_n$ entspricht auf Grund der in § 11 getroffenen Festsetzungen in der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ das Element

$$P' = C_{\lambda_1} C_{\lambda_2} \cdots,$$

wo

$$C_{\lambda_1} = T_{\lambda_1-1} T_{\lambda_1-2} \cdots T_1, \quad C_{\lambda_2} = T_{\lambda_1+\lambda_2-1} T_{\lambda_1+\lambda_2-2} \cdots T_{\lambda_1+1}, \quad \cdots$$

zu setzen und insbesondere für $\lambda_a = 1$ unter C_{λ_a} das Einheitselement E von $\mathfrak{T}_n$ zu verstehen ist. Die Matrizen, die in der Darstellung Δ_n den Elementen P' und C_{λ_a} von $\mathfrak{T}_n$ entsprechen, mögen mit denselben Buchstaben bezeichnet werden. Ist nun n ungerade, also gleich $2m+1$, so kommt M_{2m+1} in keiner der Matrizen (55.) vor und ist also, wenn die C_{λ_a} durch die $M_\varkappa$ ausgedrückt werden, überhaupt nicht zu berücksichtigen. Ist aber $n = 2m+2$, so kommt M_{2m+1} nur in T_{n-1} vor und ist daher nur dann in Betracht zu ziehen, wenn P der Zyklus $(1,2,\dots n)$, also

$$P' = T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1$$

wird. Ferner drückt sich C_{λ_1} durch die Produkte der Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{\lambda_1-1}$ aus, ebenso C_{λ_2} durch die Produkte der Matrizen $M_{\lambda_1}, M_{\lambda_1+1}, \dots M_{\lambda_1+\lambda_2-1}$ usw. Auf Grund der oben gemachten Bemerkung erkennt man daher, *daß, wenn die Spur von* C_{λ_a} *gleich* $2^m c_a$ *wird, die Spur von* P' *den Wert* $2^m c_1 c_2 \cdots$ *erhält.*

Wir haben demnach nur die Spur eines Elements der Form

$$C = T_\beta T_{\beta-1} \cdots T_{\beta-\alpha}$$

zu berechnen. Es wird dann

$$C = (a_{\beta-1} M_{\beta-1} + b_\beta M_\beta)(a_{\beta-2} M_{\beta-2} + b_{\beta-1} M_{\beta-1}) \cdots (a_{\beta-\alpha-1} M_{\beta-\alpha-1} + b_{\beta-\alpha} M_{\beta-\alpha}).$$

Führt man hier die Multiplikation aus, so hat man, da es sich für uns nur um die Bestimmung der Spur von C handelt, allein diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche von der Form cE sind. Ist nun die Anzahl $\alpha+1$ der Faktoren T_λ von C gerade, so hat die verlangte Form nur das eine Glied

$$a_{\beta-1} b_{\beta-1} M_{\beta-1}^2 \cdot a_{\beta-3} b_{\beta-2} M_{\beta-3}^2 \cdots a_{\beta-\alpha} b_{\beta-\alpha} M_{\beta-\alpha}^2.$$

Die Spur von C wird dann wegen

$$M_\lambda^2=(-1)^{\lambda-1}E,\ a_\lambda b_\lambda=\frac{(-1)^{\lambda-1}}{2}$$

gleich $2^{m-\frac{\alpha+1}{2}}$. Ist dagegen $\alpha+1$ ungerade, so wird die Spur von C gleich Null, es sei denn, daß $n=2m+2$ und

$$C=T_{n-1}T_{n-2}\cdots T_1$$
$$=(a_{2m}M_{2m}+b_{2m+1}M_{2m+1})(a_{2m-1}M_{2m-1}+b_{2m}M_{2m})\cdots(a_1M_1+b_2M_2)\cdot b_1M_1$$

wird. In diesem Fall enthält die Entwicklung von C das Glied

$$b_{2m+1}M_{2m+1}\cdot b_{2m}M_{2m}\cdots b_2M_2\cdot b_1M_1,$$

das auf Grund der Gleichung (53.) gleich wird

$$b_1b_2\cdots b_{2m+1}\cdot E.$$

Der hier auftretende Faktor hat den Wert

$$i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdots\frac{\sqrt{2m+1}}{2\sqrt{m}}\cdot\frac{i\sqrt{m+1}}{\sqrt{2m+1}}=\frac{i^{m+1}\sqrt{m+1}}{2^m}.$$

Daher wird die Spur von C gleich

$$i^{m+1}\sqrt{m+1}=\sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}}.$$

Sind nun die Ordnungen $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_\varrho$ der Zykeln der früher betrachteten Permutation P sämtlich ungerade, so wird die Spur $2^m c_\alpha$ von C_{λ_α} gleich $2^{m-\frac{\lambda_\alpha-1}{2}}$, und daher wird die Spur $\chi(P')$ der Matrix P gleich

$$2^{m-\frac{\lambda_1-1}{2}-\frac{\lambda_2-1}{2}-\cdots-\frac{\lambda_\varrho-1}{2}}=2^{\frac{2m-n+\varrho}{2}}=2^{\left[\frac{\varrho-1}{2}\right]}.$$

Ist dagegen auch nur eine der Zahlen λ_α gerade, so wird $\chi(P')$ gleich Null mit Ausnahme des Falles, daß n gerade und $P=(1,2,\ldots n)$ ist. Dann wird

$$\chi(P')=\sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}}.$$

Benutzt man nun die in § 17 eingeführten Bezeichnungen, so ergibt sich:

VII. *Ist* $[\alpha]$ *eine Klasse ähnlicher Permutationen von* $\mathfrak{S}_n$, *die in* σ_α *Zykeln ungerader Ordnung zerfallen, so wird für den Hauptcharakter zweiter Art* $\chi(T)$ *von* $\mathfrak{T}_n$

$$\chi_\alpha=2^{\left[\frac{\sigma_\alpha-1}{2}\right]}.$$

Für ein ungerades n ist $\chi(T)$ *ein zweiseitiger Charakter. Ist aber n gerade, so ist* $\chi(T)$ *ein nicht zweiseitiger Charakter, und es wird für die Klasse* (n) *der Zykeln n-ter Ordnung*

$$\chi_{(n)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}},$$

für alle übrigen ungeraden Klassen (ν) *aber*

$$\chi_{(\nu)} = 0.$$

§ 24. Ist n ungerade, so haben wir noch, da $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter wird, die zu $\chi(T)$ gehörenden einfachen Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ zu bestimmen. Es genügt hierzu nach dem früheren, das Komplement $\delta(B) = \psi(B) - \overline{\psi}(B)$ von $\chi(T)$ anzugeben.

Um diese Aufgabe zu lösen, beachte man, daß für $n = 2m+1$ die Elemente $T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ unserer Darstellung Δ_n die Matrix M_{2m+1} nicht enthalten. Da

$$M_{2m+1} M_\lambda = -M_\lambda M_{2m+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots 2m)$$

ist, so ergibt sich daher

$$M_{2m+1}^{-1} T_\lambda M_{2m+1} = -T_\lambda.$$

Beachtet man noch, daß $M_{2m+1}^2 = E$ ist, so erkennt man, daß M_{2m+1} für die Darstellung Δ_n genau dieselbe Rolle spielt, wie die Matrix H für die in § 16 betrachtete zweiseitige Darstellung. Um daher $\delta(B)$ zu bestimmen, hat man nur für alle geraden Permutationen P die Spur der Matrix $M_{2m+1} P'$ anzugeben. Wir können uns hierbei wieder auf die Permutationen P der Form (59.) beschränken.

Da nun auf Grund der Gleichungen (51.) — (53.)

$$M_{2m+1} = \pm M_1 M_2 \cdots M_{2m}$$

ist, so wird die Spur eines Produktes

$$M_{2m+1} M_\alpha M_\beta \cdots$$

stets Null, wenn $\alpha, \beta, \ldots$ irgendwelche Indizes aus der Reihe $1, 2, \ldots 2m$ bedeuten, deren Anzahl kleiner als $2m$ ist. Hieraus folgt leicht, daß $M_{2m+1} P'$ die Spur Null hat, wenn P nicht der Zyklus $(1, 2, \ldots n)$ ist. In diesem Fall wird aber wieder

$$P' = T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1$$
$$= (a_{2m-1} M_{2m-1} + b_{2m} M_{2m})(a_{2m-2} M_{2m-2} + b_{2m-1} M_{2m-1}) \cdots (a_1 M_1 + b_2 M_2) \cdot b_1 M_1,$$

und die Spur $\delta(P')$ von $M_{2m+1} P'$ wird gleich der Spur von

$$M_{2m+1} \cdot b_{2m} M_{2m} \cdot b_{2m-1} M_{2m-1} \cdots b_2 M_2 \cdot b_1 M_1 = b_1 b_2 \cdots b_{2m} E,$$

also gleich

$$2^m b_1 b_2 \cdots b_{2m} = i^m \sqrt{2m+1} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}.$$

Benutzt man wieder die Bezeichnungen des § 17, so kann man folgende Regel aufstellen:

VII*. *Ist n eine ungerade Zahl, so wird für das Komplement $\delta(B)$ des Hauptcharakters zweiter Art*

$$\delta_{(n)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \quad \delta_{(\nu)} = 0.$$

Hierbei bedeutet (n) wieder die Klasse der Zykeln n-ter Ordnung von $\mathfrak{S}_n$ und (ν) irgendeine von (n) verschiedene (gerade) Klasse.

§ 25. Der in § 22 gegebene Beweis für die Irreduzibilität der Darstellung Δ_n stützt sich auf die Betrachtung der Matrizen (54.). Es soll hier noch ein anderer Beweis angegeben werden, der nur von dem uns jetzt bekannten Charakter $\chi(T)$ der Darstellung Δ_n Gebrauch macht. Wir werden hierbei auf eine Klasse von symmetrischen Funktionen geführt werden, die für unsere ganze Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist.

Man hat, um die Irreduzibilität von Δ_n nachzuweisen, nur zu zeigen, daß $\chi(T)$ ein einfacher Charakter ist, und hierzu genügt es, sich zu überzeugen, daß für die Zahlen χ_a und $\chi_{(\nu)}$ die Gleichungen (39.) und (42.) des § 17 erfüllt sind. Die Gleichung (42.) kommt nur für ein gerades n in Betracht und ist unmittelbar zu verifizieren. Es handelt sich also nur um die Gleichung

$$\sum_a h_a \chi_a^2 = \frac{n!}{2^\varepsilon},$$

wo hier ε gleich Null oder Eins zu setzen ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Wenden wir dieselben Bezeichnungen wie im § 17 an, so wird nach Satz VII für ein gerades n

$$\chi_a = \chi_{\alpha_1, \alpha_3, \ldots} = 2^{\frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots - 2}{2}}$$

und für ein ungerades n

$$\chi_a = \chi_{\alpha_1, \alpha_3, \ldots} = 2^{\frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots - 1}{2}}.$$

Die zu beweisende Gleichung lautet daher

$$\sum \frac{n!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 3^{\alpha_3}\alpha_3! \cdots} 2^{\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots - \varepsilon - 1} = \frac{n!}{2^\varepsilon}$$

oder einfacher

$$\sum \frac{2^{\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots}}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 3^{\alpha_3}\alpha_3! \cdots} = 2, \tag{60.}$$

wo die Summen über alle ganzzahligen (nicht negativen) Lösungen $\alpha_1, \alpha_3, \ldots$

der Gleichung

$$\alpha_1 + 3\alpha_3 + \cdots = n$$

zu erstrecken sind.

Um die Richtigkeit der Formel (60.) nachzuweisen, betrachte ich die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{(1+x_1 z)(1+x_2 z)\cdots(1+x_r z)}{(1-x_1 z)(1-x_2 z)\cdots(1-x_r z)}$$

der Variabeln z; hierbei sollen auch $x_1, x_2, \ldots x_r$ Variable bedeuten. Entwickelt man $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z, so möge sich

$$f(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$$

ergeben. Dann lassen sich $q_1, q_2, \ldots$ folgendermaßen berechnen: Man setze

$$s_\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda + \cdots + x_r^\lambda,$$

dann wird

$$\log f(z) = \sum_x \log \frac{1+z x_x}{1-z x_x} = 2 \sum_x \left(\frac{x_x z}{1} + \frac{x_x^3 z^3}{3} + \cdots \right)$$

$$= \frac{2s_1}{1} z + \frac{2s_3}{3} z^3 + \cdots$$

und folglich

$$f(z) = e^{\log f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{2s_1}{1} z + \frac{2s_3}{3} z^3 + \cdots \right)^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{\alpha_1+\alpha_3+\cdots=\nu} \frac{\nu!}{\alpha_1!\,\alpha_3!\cdots} \left(\frac{2s_1}{1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{2s_3}{3} \right)^{\alpha_3} \cdots z^{\alpha_1+3\alpha_3+\cdots}.$$

Hieraus ergibt sich aber

$$(61.) \qquad q_n = \sum \frac{2^{\alpha_1+\alpha_3+\cdots}}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\,3^{\alpha_3}\alpha_3!\cdots} s_1^{\alpha_1} s_3^{\alpha_3} \cdots . \qquad (\alpha_1+3\alpha_3+\cdots=n)$$

Wird nun speziell

$$x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; \ldots \; x_r = 0,$$

so erhält man

$$s_1 = s_3 = \cdots = 1$$

und wegen

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \cdots$$

noch $q_n = 2$. Setzt man diese Werte für $s_1, s_3, \ldots$ und q_n in (61.) ein, so ergibt sich die zu beweisende Formel (60.).

Abschnitt VII.

Über die Gruppen $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$.

§ 26. Um mit Hilfe des im vorigen Abschnitt gewonnenen Charakters auch die übrigen einfachen Charaktere zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$

zu berechnen, müssen wir eine spezielle Klasse von Untergruppen dieser Gruppe genauer studieren.

Es seien $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$ positive ganze Zahlen, deren Summe gleich n ist. Man bezeichne mit S_α eine Permutation von $\mathfrak{S}_n$, die nur die ν_α Ziffern

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{\alpha-1} + 1,\ \nu_1 + \cdots + \nu_{\alpha-1} + 2,\ \dots\ \nu_1 + \cdots + \nu_{\alpha-1} + \nu_\alpha$$

untereinander vertauscht. Dann bilden die $\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_m!$ Permutationen der Form $S_1 S_2 \dots S_m$ eine Untergruppe $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ von $\mathfrak{S}_n$, ferner bilden die geraden unter ihnen eine Untergruppe $\mathfrak{A}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ der Ordnung $\frac{1}{2}\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_m!$*). Bezeichnet man mit $\mathfrak{S}_{\nu_\alpha}$ die symmetrische Gruppe der $\nu_\alpha!$ Permutationen S_α, so erscheint $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ als das direkte Produkt der m Gruppen $\mathfrak{S}_{\nu_1}, \mathfrak{S}_{\nu_2}, \dots \mathfrak{S}_{\nu_m}$.

Zu jeder Permutation P von $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ gehören in der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ zwei Elemente P' und JP', und die sich auf diese Weise ergebenden $2 \cdot \nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_m!$ Elemente bilden eine Untergruppe $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ von $\mathfrak{T}_n$. Ebenso entsprechen den Untergruppen $\mathfrak{A}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ und $\mathfrak{S}_{\nu_\alpha}$ von $\mathfrak{S}_n$ in der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ Untergruppen $\mathfrak{B}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ und $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$, deren Ordnungen die Zahlen $\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_m!$ und $2 \cdot \nu_\alpha!$ sind. Die Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ ist hierbei nichts anderes als die von uns studierte Darstellungsgruppe der symmetrischen Gruppe mit ν_α Vertauschungsziffern.

Die Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ kann als abstrakte Gruppe folgendermaßen definiert werden. Man betrachte die m (abstrakten) Gruppen $\mathfrak{T}_{\nu_1}, \mathfrak{T}_{\nu_2}, \dots \mathfrak{T}_{\nu_m}$ und mache die Festsetzungen:

a) Die in diesen m Gruppen enthaltenen (dem Element J von $\mathfrak{T}_n$ entsprechenden) invarianten Elemente sollen einander gleich sein und mit J bezeichnet werden;

b) sind R_α und R_β zwei Elemente der Gruppen $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ und $\mathfrak{T}_{\nu_\beta}$, so soll $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$ sein, wenn R_α in der Untergruppe $\mathfrak{B}_{\nu_\alpha}$ von $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ oder R_β in der Untergruppe $\mathfrak{B}_{\nu_\beta}$ von $\mathfrak{T}_{\nu_\beta}$ enthalten ist, dagegen soll, wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, $R_\alpha R_\beta = J R_\beta R_\alpha$ sein.

Dann erzeugen die Elemente von $\mathfrak{T}_{\nu_1}, \mathfrak{T}_{\nu_2}, \dots \mathfrak{T}_{\nu_m}$ die Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$, und jedes Element dieser Gruppe läßt sich als Produkt $R_1 R_2 \cdots R_m$ darstellen, wo R_α ein Element von $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ bedeutet. Hierbei werden aber je 2^{m-1} dieser Produkte einander gleich. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ von

---

*) Der Fall $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_m = 1$ ist hierbei auszuschließen.

$\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}$ wird ferner dadurch erhalten, daß man nur diejenigen Produkte $R_1 R_2 \cdots R_m$ betrachtet, in denen die Anzahl der Faktoren R_a, die nicht in den zugehörigen Gruppen $\mathfrak{B}_{\nu_a}$ vorkommen, gerade ist.

Im folgenden schreibe ich für $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}$ und $\mathfrak{B}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m}$ kürzer $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{B}$. Die Elemente von $\mathfrak{B}$ bezeichne ich mit B und die Elemente von $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten sind, mit C. Ebenso soll ein Element von $\mathfrak{T}_{\nu_a}$ mit B_a oder C_a bezeichnet werden, je nachdem es in $\mathfrak{B}_{\nu_a}$ vorkommt oder nicht.

§ 27. Ich will nun die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{T}$ durch homogene lineare Substitutionen (Matrizen) genauer untersuchen.

Entspricht in einer solchen Darstellung Δ dem Element J von $\mathfrak{T}$ die Matrix $\pm E$, so bezeichne ich wieder Δ als eine Darstellung erster oder zweiter Art, je nachdem hier das obere oder das untere Zeichen auftritt. Aus jeder Darstellung geht auch hier, wie früher bei der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, eine zweite Darstellung Δ' hervor, indem man die Matrizen von Δ, die den Elementen von $\mathfrak{B}$ entsprechen, ungeändert läßt, dagegen die übrigen mit -1 mutipliziert. Die Darstellungen Δ und Δ' nennen wir wieder *assoziierte* Darstellungen; sind insbesondere Δ und Δ' einander äquivalent, so soll Δ eine *zweiseitige* Darstellung heißen. Man zeigt nun ebenso, wie in § 16 bei der Betrachtung der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, daß sich für jede irreduzible zweiseitige Darstellung Δ von $\mathfrak{T}$ eine Matrix H angeben läßt, welche die Darstellung Δ in die ihr assoziierte Darstellung transformiert und außerdem der Bedingung $H^2 = E$ genügt und die Spur Null besitzt. Entspricht in Δ die Matrix B einem Element der Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$ und sind $\zeta(B)$ und $\eta(B)$ die Spuren der Matrizen B und HB, so erhält man wieder zwei einfache Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}$, indem man setzt

$$\psi(B) = \frac{1}{2}[\zeta(B)+\eta(B)], \quad \overline{\psi}(B) = \frac{1}{2}[\zeta(B)-\eta(B)].$$

Die Zahlen $\eta(B) = \psi(B) - \overline{\psi}(B)$ nenne ich wieder das *Komplement* des Charakters $\zeta(R)$.

Es soll nun gezeigt werden, *daß man eine irreduzible Darstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}$ bestimmen kann, sobald man nur eine solche Darstellung für jede der die Gruppe $\mathfrak{T}$ erzeugenden Gruppen $\mathfrak{T}_{\nu_1}, \mathfrak{T}_{\nu_2}, \ldots \mathfrak{T}_{\nu_m}$ kennt.*

Man habe nämlich für die Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_a}$ eine irreduzible Darstellung zweiter Art Δ_a des Grades f_a, zu der der Charakter $\chi^{(a)}(R_a)$ von $\mathfrak{T}_{\nu_a}$ gehört. Die Matrizen, die in Δ_a den Elementen B_a und C_a von $\mathfrak{T}_{\nu_a}$ ent-

sprechen, mögen mit $\overline{B}_a$ und $\overline{C}_a$ bezeichnet werden. Ist Δ_a insbesondere eine zweiseitige Darstellung, so sei H_a eine Matrix, die Δ_a in die assoziierte Darstellung transformiert und der Gleichung $H_a^2 = E_a$ genügt, wo E_a die Einheitsmatrix des Grades f_a bedeutet. Die Spur von H_a ist dann Null und es ist

$$H_a \overline{B}_a = \overline{B}_a H_a, \quad H_a \overline{C}_a = -\overline{C}_a H_a. \tag{62.}$$

Ist noch $\delta^{(a)}(B_a)$ die Spur der Matrix $H_a \overline{B}_a$, so bilden die Zahlen $\delta^{(a)}(B_a)$ das Komplement des Charakters $\chi^{(a)}(R_a)$ (vgl. § 16).

Unter den m Darstellungen Δ_a seien r zweiseitig und $m-r=s$ nicht zweiseitig. Der Einfachheit wegen will ich annehmen, daß $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_r$ die r zweiseitigen Darstellungen seien. Man setze nun $t = \left[\frac{s}{2}\right]$, so daß also $s = 2t$ oder $s = 2t+1$ wird, und bestimme nach den Vorschriften des § 21 die Matrizen $M_1, M_2, \dots M_{2t+1}$ des Grades 2^t. Ist dann

$$F_1 = iM_1, \quad F_2 = M_2, \quad F_3 = iM_3, \quad \dots \quad F_{2t} = iM_{2t}, \quad F_{2t+1} = M_{2t+1}$$

und bedeutet F_0 die Einheitsmatrix des Grades 2^t, so wird auf Grund der Formeln des § 21

$$F_\varkappa^2 = F_0, \quad F_\varkappa F_\lambda = -F_\lambda F_\varkappa, \quad F_{2t+1} F_{2t} \cdots F_2 F_1 = i^t F_0.$$

Es wird also insbesondere

$$F_{s+1} F_s \cdots F_2 F_1 = i^{\frac{s}{2}} F_0 \tag{63.}$$

für ein gerades s und

$$F_s F_{s-1} \cdots F_2 F_1 = i^{\frac{s-1}{2}} F_0 \tag{64.}$$

für ein ungerades s.

Um nun eine Darstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}$ zu erhalten, setze ich unter Benutzung der in § 21 erläuterten Bezeichnungen

$$B_a = F_0 \times E_1 \times \cdots \times E_{a-1} \times \overline{B}_a \times E_{a+1} \times \cdots \times E_{r+s} \qquad (a = 1, 2, \dots m)$$

und ferner

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= F_0 \times \overline{C}_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{r-1} \times E_r \times E_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}, \\
\Gamma_2 &= F_0 \times H_1 \times \overline{C}_2 \times \cdots \times E_{r-1} \times E_r \times E_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Gamma_r &= F_0 \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{r-1} \times \overline{C}_r \times E_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}, \\
\Gamma_{r+1} &= F_s \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{r-1} \times H_r \times \overline{C}_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}, \\
\Gamma_{r+2} &= F_{s-1} \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{r-1} \times H_r \times E_{r+1} \times \overline{C}_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Gamma_{r+s} &= F_1 \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{r-1} \times H_r \times E_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times \overline{C}_{r+s}.
\end{aligned}$$

Man erkennt nun auf Grund der Gleichungen $F_\varkappa^2 = F_0$ und $H_\alpha^2 = E_\alpha$ zunächst, daß für jedes α die Matrizen B_α und Γ_α, ebenso wie das für die Matrizen $\overline{B}_\alpha$ und $\overline{C}_\alpha$ der Fall ist, eine Darstellung zweiter Art von $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ bilden. Wegen der Gleichungen $F_\varkappa F_\lambda = -F_\lambda F_\varkappa$ und der Gleichungen (62.) ergibt sich ferner für $\alpha \neq \beta$

$$B_\alpha B_\beta = B_\alpha B_\beta,\ B_\alpha \Gamma_\beta = \Gamma_\beta B_\alpha,\ \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = -\Gamma_\beta \Gamma_\alpha.$$

Hieraus folgt aber leicht, daß die Matrizen

$$B_1, \Gamma_1, B_2, \Gamma_2, \ldots B_m, \Gamma_m$$

eine Darstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}$ erzeugen. Der Grad dieser Darstellung ist gleich $2^t f_1 f_2 \cdots f_m$.

§ 28. Es soll nun der zu der eben gewonnenen Darstellung gehörende Charakter $\zeta(R)$ von $\mathfrak{T}$ berechnet werden, d. h. es soll, wenn dem Element R von $\mathfrak{T}$ die Matrix P entspricht, die Spur $\zeta(R)$ von P angegeben werden.

Man beachte hierzu, daß die Spur einer Matrix $X_1 \times X_2 \times \cdots$ gleich ist dem Produkt der Spuren der Matrizen $X_1, X_2, \ldots$ und daß die Spuren der Matrizen

$$F_1, F_2, \ldots F_s,\ F_2F_1, \ldots F_sF_1,\ F_3F_2, \ldots F_3F_2F_1, \ldots F_sF_{s-1}\cdots F_1$$

für ein gerades s sämtlich verschwinden und für ein ungerades s alle mit Ausnahme der letzten gleich Null sind (vgl. § 21). Die Spur von $F_sF_{s-1}\cdots F_1$ wird aber (für ein ungerades s) wegen (64.) gleich $(2i)^{\frac{s-1}{2}}$. Außerdem sind die Spuren von $\overline{B}_\alpha, \overline{C}_\alpha, H_\alpha \overline{C}_\alpha$ nach Voraussetzung gleich $\chi^{(\alpha)}(B_\alpha), \chi^{(\alpha)}(C_\alpha), \delta^{(\alpha)}(B_\alpha)$ und für $\alpha = 1, 2, \ldots r$ die Spuren von $H_\alpha, \overline{C}_\alpha$ und $H_\alpha \overline{C}_\alpha$ gleich Null.

Auf Grund dieser Bemerkungen beweist man leicht:

a) *Ist s ungerade, so wird*

$$\zeta(B_1 B_2 \cdots B_m) = 2^{\frac{s-1}{2}} \chi^{(1)}(B_1)\chi^{(2)}(B_2)\cdots\chi^{(m)}(B_m), \tag{65.}$$

$$\zeta(B_1 \cdots B_r C_{r+1} \cdots C_{r+s}) = (2i)^{\frac{s-1}{2}} \delta^{(1)}(B_1)\cdots\delta^{(r)}(B_r)\chi^{(r+1)}(C_{r+1})\cdots\chi^{(r+s)}(C_{r+s}) \tag{66.}$$

und $\zeta(R) = 0$, wenn das Element R von $\mathfrak{T}$ nicht von der Form $B_1 B_2 \cdots B_m$ oder $B_1 \cdots B_r C_{r+1} \cdots C_{r+s}$ ist.

b) *Ist s gerade, so wird*

$$\zeta(B_1 B_2 \cdots B_m) = 2^{\frac{s}{2}} \chi^{(1)}(B_1)\chi^{(2)}(B_2)\cdots\chi^{(m)}(B_m) \tag{67.}$$

und $\zeta(R) = 0$, wenn R nicht die Form $B_1 B_2 \cdots B_m$ hat.

Hieraus folgt insbesondere, daß $\zeta(R)$ für ein gerades s ein zweiseitiger und für ein ungerades s ein nicht zweiseitiger Charakter ist.

Berücksichtigt man noch, daß für $\alpha \leqq r$

$$\sum_{B_\alpha} \chi^{(\alpha)}(B_\alpha)\chi^{(\alpha)}(B_\alpha^{-1}) = \sum_{B_\alpha} \delta^{(\alpha)}(B_\alpha)\delta^{(\alpha)}(B_\alpha^{-1}) = 2 \cdot \nu_\alpha!$$

und für $\alpha > r$

$$\sum_{B_\alpha} \chi^{(\alpha)}(B_\alpha)\chi^{(\alpha)}(B_\alpha^{-1}) = \sum_{C_\alpha} \chi^{(\alpha)}(C_\alpha)\chi^{(\alpha)}(C_\alpha^{-1}) = \nu_\alpha!$$

wird*), so beweist man ohne Mühe die Gleichung

$$\sum_{R} \zeta(R)\zeta(R^{-1}) = 2 \cdot \nu_1! \nu_2! \cdots \nu_m!.$$

Daher ist $\zeta(R)$ ein einfacher Charakter, die von uns hergestellte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{T}$ also irreduzibel.

Ist s eine gerade Zahl, also $\zeta(R)$ ein zweiseitiger Charakter von $\mathfrak{T}$, so haben wir noch das Komplement $\eta(B)$ dieses Charakters anzugeben.

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir nach dem früheren eine Matrix H des Grades $2^{\frac{s}{2}} f_1 f_2 \ldots f_m$ kennen, die unsere Darstellung der Gruppe $\mathfrak{T}$ in die assoziierte Darstellung transformiert und der Gleichung $H^2 = E$ genügt. Diese Eigenschaft besitzt aber in unserem Fall die Matrix

$$H = F_{s+1} \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_r \times E_{r+1} \times E_{r+2} \times \cdots \times E_{r+s}.$$

Dies folgt unmittelbar aus den leicht zu beweisenden Gleichungen

$$H^2 = E, \; HB_\alpha = B_\alpha H, \; H\Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha H.$$

Wir haben die Spur $\eta(B)$ der Matrix HB zu berechnen, wenn die Matrix B in unserer Darstellung dem Element B der Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$ entspricht. Beachtet man nun, daß die Spuren der Matrizen

$$H_\varrho, \; \overline{C}_\varrho, \; H_\varrho \overline{C}_\varrho, \; F_{s+1}, \; F_{s+1}F_\varkappa F_\lambda \ldots \qquad (\varrho \leqq r, s \geqq \varkappa > \lambda > \cdots)$$

sämtlich Null sind, abgesehen von der Matrix $F_{s+1}F_s \ldots F_2 F_1$, die nach (63.) die Spur $(2i)^{\frac{s}{2}}$ hat, so erhält man ohne Mühe die Regel:

Hat B nicht die Form $B_1 \cdots B_r C_{r+1} \cdots C_{r+s}$, so ist $\eta(B) = 0$, dagegen ist

$$(68.)\quad \eta(B_1 \cdots B_r C_{r+1} \cdots C_{r+s}) = (2i)^{\frac{s}{2}} \delta^{(1)}(B_1) \cdots \delta^{(r)}(B_r) \chi^{(r+1)}(C_{r+1}) \cdots \chi^{(r+s)}(C_{r+s}).$$

§ 29. Ich behandle nun insbesondere den für das folgende wichtigen Fall, daß $\chi^{(\alpha)}$ der im vorigen Abschnitt bestimmte Hauptcharakter zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha}$ ist**).

---

*) Vgl. die Formeln der §§ 14—16.

**) Ist $\nu_\alpha = 1$, also $\mathfrak{T}_{\nu_\alpha} = E + J$, so hat man $\chi^{(\alpha)}(E) = 1$, $\chi^{(\alpha)}(J) = -1$ zu setzen.

Verstehen wir wieder, wenn P eine Permutation von $\mathfrak{S}_n$ ist, unter P' das nach den Vorschriften des § 11 zu fixierende Element von $\mathfrak{T}_n$, so haben wir die Zahlen $\zeta(R)$ nur für die Elemente $R = P'$ anzugeben, die den Permutationen P der Untergruppe $\mathfrak{S}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ von $\mathfrak{S}_n$ entsprechen.

Ist nun P_a eine (gerade) Permutation von $\mathfrak{S}_{\nu_a}$, die in σ_a Zykeln ungerader Ordnung zerfällt, so wird in unserem Falle nach Satz VII

$$\chi^{(a)}(P_a') = 2^{\left[\frac{\sigma_a - 1}{2}\right]}.$$

Für ein gerades ν_a wird ferner $\chi^{(a)}$ ein nicht zweiseitiger Charakter, und es ist, falls Z_a einen Zyklus der Ordnung ν_a von $\mathfrak{S}_{\nu_a}$ bedeutet,

$$\chi^{(a)}(Z_a') = \sqrt{(-1)^{\frac{\nu_a}{2}} \cdot \frac{\nu_a}{2}}.$$

Ist dagegen ν_a ungerade, so ist $\chi^{(a)}$ ein zweiseitiger Charakter; dann wird noch, wenn Y_a ein Zyklus der Ordnung ν_a von $\mathfrak{S}_{\nu_a}$ ist, nach VII*

$$\delta^{(a)}(Y_a') = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{\nu_a - 1}{2}} \nu_a},$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem Y_a in der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_{\nu_a}$ dem Zyklus

(69.) $(\nu_1 + \cdots + \nu_{a-1} + 1,\ \nu_1 + \cdots + \nu_{a-1} + 2,\ \dots\ \nu_1 + \cdots + \nu_{a-1} + \nu_a)$

konjugiert ist oder nicht (vgl. §§ 17 und 24). Für alle hier nicht erwähnten Permutationen S_a von $\mathfrak{S}_{\nu_a}$ ist $\chi^{(a)}(S_a') = 0$, bzw. $\delta^{(a)}(S_a') = 0$ zu setzen.

Ich nehme nun an, es seien unter den m Zahlen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$ die ersten r ungerade, die folgenden $m - r = s$ gerade, und zwar sollen die s geraden Zahlen nach abnehmender Größe geordnet sein.

Ist dann s ungerade, so wird auf Grund der Formeln (65.) und (66.)

$$\zeta(P_1' P_2' \dots P_m') = 2^{\frac{s-1}{2}} \cdot 2^{\frac{\sigma_1 - 1}{2}} \cdots 2^{\frac{\sigma_r - 1}{2}} \cdot 2^{\frac{\sigma_{r+1} - 2}{2}} \cdots 2^{\frac{\sigma_{r+s} - 2}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}[\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m - m - 1]}$$

und

$$\zeta(Y_1' \cdots Y_r' Z_{r+1}' \cdots Z_{r+s}') = \pm (2i)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{\nu_1 - 1}{2} + \cdots + \frac{\nu_r - 1}{2} + \frac{\nu_{r+1}}{2} + \cdots + \frac{\nu_{r+s}}{2}} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}{2^s}}$$
$$= \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}{2}}.$$

Ebenso wird für ein gerades s wegen (67.) und (68.)

$$\zeta(P_1' P_2' \cdots P_m') = 2^{\frac{s}{2}} \cdot 2^{\frac{\sigma_1 - 1}{2}} \cdots 2^{\frac{\sigma_r - 1}{2}} \cdot 2^{\frac{\sigma_{r+1} - 2}{2}} \cdots 2^{\frac{\sigma_{r+s} - 2}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}[\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m - m]}$$

und

$$\eta(Y_1' \cdots Y_r' Z_{r+1}' \cdots Z_{r+s}') = \pm (2i)^{\frac{s}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{\nu_1 - 1}{2} + \cdots + \frac{\nu_r - 1}{2} + \frac{\nu_{r+1}}{2} + \cdots + \frac{\nu_{r+s}}{2}} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m}{2^s}}$$

$$= \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}.$$

In beiden Fällen sind die Vorzeichen bei den Quadratwurzeln*) so zu fixieren, daß das obere oder das untere Zeichen gewählt wird, je nachdem die Anzahl der Indizes ϱ, für welche der Zyklus Y_ϱ in $\mathfrak{A}_{\nu_\varrho}$ dem Zyklus (69.) *nicht* konjugiert ist, gerade oder ungerade ist. Ferner ist für alle Elemente R von $\mathfrak{T}$, für die weder R noch JR von der Form $P_1' P_2' \cdots P_m'$ oder von der Form $Y_1' \cdots Y_r' Z_{r+1}' \cdots Z_{r+s}'$ ist, $\zeta(R) = 0$ zu setzen. Ebenso wird $\eta(B) = 0$, wenn weder B noch JB die Form $Y_1' \cdots Y_r' Z_{r+1}' \cdots Z_{r+s}'$ hat.

Beachtet man noch, daß stets

$$\zeta(JR) = -\zeta(R), \quad \eta(JB) = -\eta(B)$$

sein soll, so erscheint der Charakter $\zeta(R)$ und für ein gerades s auch sein Komplement $\eta(B)$ als vollständig bestimmt.

§ 30. Unser Resultat kann, soweit es für das folgende von Wichtigkeit ist, noch wesentlich einfacher ausgesprochen werden.

Man setze μ gleich Null oder Eins, je nachdem s oder, was dasselbe ist, $n - m$ gerade oder ungerade ist. Dann ist für jede Permutation P von $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$, die in σ Zykeln ungerader Ordnungen zerfällt

$$\zeta(P') = 2^{\frac{\sigma - m - \mu}{2}}.$$

Sind ferner die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ nicht sämtlich voneinander verschieden, so ist für jede Permutation Q von $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$, die in Zykeln von untereinander verschiedenen Ordnungen zerfällt, falls Q ungerade ist, $\zeta(Q') = 0$ und, falls $\mu = 0$ und Q gerade ist, $\eta(Q') = 0$. Sind aber die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ voneinander verschieden, so tritt eine Ausnahme ein für diejenigen Permutationen Q von $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$, die in m Zykeln der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ zerfallen, und zwar wird dann, wenn $\mu = 1$ und Q ungerade ist,

*) Unter $\sqrt{(-1)^\lambda p}$ verstehe ich, wenn p reell und positiv ist, die Zahl $i^\lambda \sqrt{p}$.

$$\zeta(Q') = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}{2}}$$

und, wenn $\mu = 0$ und Q gerade ist,

$$\eta(Q') = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}.$$

In der letzten Formel ist das Vorzeichen folgendermaßen zu fixieren: Es sei S die Permutation

(70.) $(1, 2, \ldots \nu_1)\ (\nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \ldots \nu_1 + \nu_2) \cdots$

$(\nu_1 + \cdots + \nu_{m-1} + 1,\ \nu_1 + \cdots + \nu_{m-1} + 2,\ \ldots\ \nu_1 + \cdots + \nu_{m-1} + \nu_m)$

und S' das zugehörige Element von $\mathfrak{T}_n$; dann hat man das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem Q' und S' in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ einander konjugiert sind oder nicht.

Die Richtigkeit dieser Regeln ergibt sich ohne Mühe, wenn man die Festsetzungen und Ergebnisse des Abschnitts III genau berücksichtigt.

Insbesondere erhält man das für den nächsten Abschnitt wichtige Resultat:

Sind R und S zwei Elemente von $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$, denen in der Gruppe $\mathfrak{S}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ Permutationen zweiter Art entsprechen, so ist $\zeta(R) = \zeta(S)$, sobald nur R und S konjugierte Elemente der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ sind. Ebenso ist $\eta(R) = \eta(S)$, wenn den Elementen R und S Permutationen dritter Art entsprechen und die Elemente R und S in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ einander konjugiert sind.

Abschnitt VIII.

Einführung des Begriffs der Charakteristik.

§ 31. Mit Hilfe des in § 29 bestimmten Charakters $\zeta(R)$ von $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ können wir einen Charakter zweiter Art für die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ angeben*).

Ich benutze hierbei folgenden Satz des Herrn *Frobenius***):

„Es sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h, und es sei das Element R von $\mathfrak{H}$ mit h_R Elementen konjugiert. Ist dann $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe der Ordnung g von $\mathfrak{H}$ und ist $\vartheta(R)$ ein (einfacher oder zusammengesetzter) Charakter von $\mathfrak{G}$, so erhält man einen Charakter $\gamma(R)$ von $\mathfrak{H}$, indem man

---

*) Die in diesem Paragraphen durchgeführte Überlegung schließt sich aufs engste an die von Herrn *Frobenius* bei der Bestimmung der Charaktere der symmetrischen Gruppe benutzte Methode an.

**) „Über die Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen", Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie, Berlin, 1908, S. 501.

(71.) $$\gamma(R)=\frac{h}{gh_R}\sum_S \vartheta(S)$$

setzt; hierbei ist die Summe über alle h_R Elemente S von $\mathfrak{H}$ zu erstrecken, die dem Element R konjugiert sind, und $\vartheta(S)$ gleich Null zu setzen, wenn S nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten ist."

Es sei nun hier $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$, ferner bedeute $\vartheta(R)$ den oben erwähnten Charakter $\zeta(R)$ von $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$. Wird dann der zugehörige Charakter $\gamma(R)$ von $\mathfrak{T}_n$ noch mit $\xi(R)$ bezeichnet, so ist zunächst, da $\zeta(J)=-\zeta(E)$ ist,

$$\xi(J)=\frac{h}{g}\zeta(J)=-\frac{h}{g}\zeta(E)=-\xi(E).$$

Daher ist $\xi(R)$ ein Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$. Wir haben also die Zahlen $\xi(R)$ nur für diejenigen Elemente R von $\mathfrak{T}_n$ anzugeben, denen in $\mathfrak{S}_n$ Permutationen zweiter Art entsprechen. Ist nun aber P eine solche Permutation, so nimmt, wie wir in § 30 gesehen haben, $\zeta(S)$ für alle Elemente S von $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$, die in $\mathfrak{T}_n$ dem Element $R=P'$ konjugiert sind, denselben Wert an. Bedeutet daher $g_{P'}$ die Anzahl dieser Elemente von $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$, so wird, wenn S ein beliebiges unter ihnen ist,

$$\xi(P')=\frac{hg_{P'}}{gh_{P'}}\zeta(S).$$

Hierbei ist, wenn $g_{P'}=0$ wird, auch $\xi(P')=0$ zu setzen.

Nun soll doch aber P eine Permutation zweiter Art sein. Daher gibt (vgl. § 6) $h_{P'}=h_P$ zugleich die Anzahl der zu der Permutation P ähnlichen Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ an; ferner ist $g_{P'}=g_P$ die Anzahl derjenigen unter diesen Permutationen, die in $\mathfrak{S}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ vorkommen, und außerdem wird hier

$$\frac{h}{g}=\frac{2n!}{2\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_m!}=\frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_m!}.$$

Die Zahlen

$$c_P=\frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\cdots\nu_m!}\frac{g_P}{h_P}$$

hat aber bereits Herr *Frobenius**) bestimmt: Besteht die Permutation P aus λ_1 Zykeln der Ordnung 1, ferner λ_2 Zykeln der Ordnung 2, usw., so wird

$$c_P=\sum\frac{\lambda_1!}{\lambda_{11}!\lambda_{12}!\cdots}\cdot\frac{\lambda_2!}{\lambda_{21}!\lambda_{22}!\cdots}\cdots,$$

---

*) „Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe", Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie, Berlin, 1900, S. 516.

wo die Summe über alle nicht negativen ganzen Zahlen $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots$ zu erstrecken ist, die den Bedingungen

$$\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \cdots, \quad \lambda_2 = \lambda_{21} + \lambda_{22} + \cdots, \quad \ldots$$
$$\nu_1 = \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + \cdots, \quad \nu_2 = \lambda_{12} + 2\lambda_{22} + \cdots, \quad \ldots$$

genügen. Haben diese Gleichungen keine Lösung, so ist $c_P = 0$ zu setzen.

Unter Benutzung der in § 17 eingeführten Bezeichnungen können wir nun den Charakter $\xi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ folgendermaßen kennzeichnen: *Gehört die Permutation P der Klasse*

$$[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_3, \ldots]$$

an, so wird

$$\xi(P') = \xi_\alpha = c_\alpha \cdot 2^{\frac{\sigma_\alpha - m - \mu}{2}}, \qquad (\sigma_\alpha = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots) \tag{72.}$$

wo μ wie früher Null oder Eins ist, je nachdem $n-m$ gerade oder ungerade ist, und c_α die Zahl

$$c_\alpha = c_P = \Sigma \frac{\alpha_1!}{\alpha_{11}!\,\alpha_{12}!\cdots} \cdot \frac{\alpha_3!}{\alpha_{31}!\,\alpha_{32}!\cdots} \cdots$$

bedeutet. Die Summation ist hier über alle Lösungen der Gleichungen

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots, \quad \alpha_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32} + \cdots, \quad \ldots$$
$$\nu_1 = \alpha_{11} + 3\alpha_{31} + \cdots, \quad \nu_2 = \alpha_{12} + 3\alpha_{32} + \cdots, \quad \ldots$$

zu erstrecken. Lassen diese Gleichungen keine Lösung zu, so ist $c_\alpha = 0$ zu setzen. Ist ferner $\mu = 0$ oder sind $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ nicht untereinander verschieden, so ist für alle ungeraden Permutationen P die Zahl $\xi(P')$ gleich Null. Ist aber $\mu = 1$ und sind außerdem $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ voneinander verschieden, so ist noch, wenn Q eine Permutation der (ungeraden) Klasse

$$(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m)$$

ist,

$$\xi(Q') = \xi_{(\nu)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}{2}}.$$

Für alle übrigen ungeraden Klassen (λ) hat man wieder $\xi_{(\lambda)} = 0$.

Wir erkennen zugleich, daß $\xi(T)$ für $\mu = 0$ ein zweiseitiger Charakter ist. In diesem Fall haben wir noch ein Komplement $\delta(B)$ von $\xi(T)$ anzugeben. Hierzu genügt es, zwei adjungierte (einfache oder zusammengesetzte) Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ zu kennen, deren Summe der Charakter $\xi(B)$ von $\mathfrak{B}_n$ ist, und $\delta(B) = \psi(B) - \overline{\psi}(B)$ zu setzen.

Um diese Aufgabe zu lösen, wähle man in dem oben erwähnten Satz des Herrn *Frobenius* für $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ und für $\mathfrak{G}$ die Gruppe

$\mathfrak{B}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ und setze in (71.) für ϑ die beiden dem Komplement η des von uns betrachteten Charakters ζ von $\mathfrak{T}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ entsprechenden Charaktere

$$\frac{1}{2}[\zeta(B)+\eta(B)],\ \frac{1}{2}[\zeta(B)-\eta(B)]$$

von $\mathfrak{B}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$. Dann erhält man, wie leicht zu sehen ist, in den zugehörigen Charakteren γ zwei adjungierte Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ von $\mathfrak{B}_n$, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Die Differenz $\delta(B)=\psi(B)-\overline{\psi}(B)$ kann auch direkt dadurch erhalten werden, daß man in (71.) für ϑ den zusammengesetzten Charakter η von $\mathfrak{B}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ einsetzt.

Auf Grund der in § 30 erwähnten Eigenschaften der Zahlen $\eta(B)$ ergeben sich ohne Mühe folgende Bestimmungsregeln für die Zahlen $\delta(B)$: *Zunächst ist stets* $\delta(JB)=-\delta(B)$. *Sind ferner die Zahlen* $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m$ *nicht sämtlich voneinander verschieden, so ist* $\delta(B)=0$ *für alle Elemente* B *von* $\mathfrak{B}_n$. *Sind dagegen* $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m$ *voneinander verschieden, so ist, wenn* Q *eine Permutation der (geraden) Klasse*

$$(\nu)=(\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m)$$

von $\mathfrak{S}_n$ *bedeutet,*

$$\delta(Q')=\pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}}\cdot\nu_1\nu_2\cdots\nu_m};$$

hierbei hat man das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem Q *in der alternierenden Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *der Permutation* (70.) *des* § 30 *konjugiert ist oder nicht. Für alle übrigen (geraden) Permutationen* P *ist wieder* $\delta(P')=0$ *zu setzen.*

§ 32. Der im vorigen Paragraphen bestimmte Charakter $\xi(T)$ von $\mathfrak{T}_n$ läßt sich wesentlich einfacher kennzeichnen, wenn man von den in § 25 definierten symmetrischen Funktionen q_n Gebrauch macht. Ich führe zu diesem Zweck einen neuen Begriff ein.

Man bezeichne wie früher mit s_λ die λ-te Potenzsumme der r Variabeln $x_1,x_2,\dots x_r$ $(r\geqq n)$. Ist $\chi(T)$ ein beliebiger (einfacher oder zusammengesetzter) Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ und setzt man, wie in § 17, wenn P eine Permutation der Klasse $[\alpha]$ von $\mathfrak{S}_n$ ist, die in α_1 Zykeln der Ordnung 1, ferner α_3 Zykeln der Ordnung 3 usw. zerfällt,

$$\chi(P')=\chi_\alpha=\chi_{\alpha_1,\alpha_3,\dots},$$

so nenne ich den Ausdruck

$$\Phi=\Sigma\frac{\chi_{\alpha_1,\alpha_3,\dots}}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\,3^{\alpha_3}\alpha_3!\dots}\cdot 2^{\frac{\alpha_1+\alpha_3+\cdots}{2}}\cdot s_1^{\alpha_1}s_3^{\alpha_3}\dots$$

die zu dem Charakter $\chi(T)$ gehörende Charakteristik. Hierbei ist die Summe über alle Lösungen $\alpha_1, \alpha_3, \ldots$ der Gleichung

$$n = \alpha_1 + 3\alpha_3 + \cdots$$

zu erstrecken. Ich schreibe auch, indem ich die Bezeichnungen

$$\sigma_a = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots, \quad A_a = \frac{1}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 3^{\alpha_3}\alpha_3! \ldots}, \quad s^{(a)} = s_1^{\alpha_1} s_3^{\alpha_3} \ldots$$

einführe, kurz

$$\Phi = \Sigma 2^{\frac{\sigma_a}{2}} A_a \chi_a s^{(a)},$$

wo die Summation also über alle v_n Klassen $[\alpha]$ zu erstrecken ist. Insbesondere wird, wie noch bemerkt sei, $h_a = n! A_a$ die Anzahl der Permutationen der Klasse $[\alpha]$.

Ist $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter, so nenne ich Φ eine *zweiseitige Charakteristik. Ebenso soll Φ eine einfache Charakteristik heißen, wenn $\chi(T)$ ein einfacher Charakter ist.*

Durch den Ausdruck Φ ist umgekehrt der Charakter $\chi(T)$ nur dann vollständig bestimmt, wenn $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter ist. Im andern Falle hat man außer den Zahlen χ_a, die durch die Koeffizienten der Funktion Φ von $s_1, s_3, \ldots$ bestimmt werden, noch die Zahlen $\chi_{(\nu)}$ zu kennen, die den *ungeraden* Klassen (ν) entsprechen (vgl. § 17). Ist ferner $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter und will man noch ein Komplement $\delta(B)$ von $\chi(T)$ angeben, so hat man noch die Zahlen $\delta_{(\nu)}$ zu kennen, die zu den *geraden* Klassen (ν) gehören. *In beiden Fällen wird also der Charakteristik Φ ein System von gewissen Zahlen $\gamma_{(\nu)}$ zugeordnet, die entweder den ungeraden oder den geraden unter den v_n Klassen (ν) entsprechen.* Das System der Zahlen $\gamma_{(\nu)}$ bezeichne ich als ein *Komplement der Charakteristik Φ.* Läßt man, wenn $\chi(T)$ ein nicht zweiseitiger Charakter ist, an Stelle von $\chi(T)$ den assoziierten Charakter treten, oder wählt man, wenn $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter ist, an Stelle des Komplements $\delta(B)$ das Komplement $-\delta(B)$, so bleibt Φ ungeändert, während $\gamma_{(\nu)}$ durch $-\gamma_{(\nu)}$ ersetzt wird. Die beiden Komplemente $\gamma_{(\nu)}$ und $-\gamma_{(\nu)}$ bezeichne ich als *entgegengesetzte Komplemente.*

Kennt man zwei Charakteristiken Φ und Φ' von $\mathfrak{T}_n$ und sind a und a' zwei beliebige ganze Zahlen, so ist auch $\Psi = a\Phi + a'\Phi'$ eine Charakteristik. Sind noch zwei Komplemente $\gamma_{(\nu)}$ und $\gamma'_{(\nu)}$ von Φ und Φ' bekannt, so kann man, wenn Φ und Φ' beide zweiseitig oder beide nicht zweiseitig sind, die

Zahlen $a\gamma_{(\nu)}+a'\gamma'_{(\nu)}$ als ein Komplement der Charakteristik Ψ ansehen. Ist dagegen etwa Φ nicht zweiseitig und Φ' zweiseitig, so ist Ψ eine nicht zweiseitige Charakteristik, für welche die Zahlen $a\gamma_{(\nu)}$ ein Komplement bilden.

Besteht ein Komplement einer zweiseitigen Charakteristik Φ aus lauter Nullen, so sage ich kurz, *Φ habe das Komplement Null.* Offenbar kann, wenn Φ eine beliebige Charakteristik ist, *der Ausdruck $2\Phi=\Phi+\Phi$ als eine zweiseitige Charakteristik mit dem Komplement Null angesehen werden.*

Da man insbesondere, wenn Φ irgendeine Charakteristik mit einem Komplement $\gamma_{(\nu)}$ ist, auch $\Phi-\Phi=0$ als eine Charakteristik auffassen kann, für welche die Zahlen $\gamma_{(\nu)}-(-\gamma_{(\nu)})=2\gamma_{(\nu)}$ ein Komplement bilden, so lassen sich für jede Charakteristik unendlich viele Komplemente angeben. Mit Hilfe der Formeln des Abschnitts IV beweist man aber leicht: *Ist Φ eine einfache Charakteristik, so gehören zu Φ nur zwei entgegengesetzte Komplemente, für die*

$$\Sigma h_{(\nu)}\gamma_{(\nu)}\overline{\gamma}_{(\nu)}=\frac{n!}{2^{\varepsilon}}$$

wird. Hierbei bedeutet $\overline{\gamma}_{(\nu)}$ die zu $\gamma_{(\nu)}$ konjugiert komplexe Zahl, ferner ist unter ε die Zahl Null oder Eins zu verstehen, je nachdem Φ eine zweiseitige Charakteristik ist oder nicht; $h_{(\nu)}$ ist die Anzahl der Permutationen der Klasse (ν)*).

§ 33. Bedeutet insbesondere $\chi(T)$ den Hauptcharakter zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, so wird, wenn jetzt ε, wie in § 25, gleich Null oder Eins gesetzt wird, je nachdem n ungerade oder gerade ist,

$$\chi_a=2^{\frac{\sigma_a-1-\varepsilon}{2}}.$$

Ferner läßt sich die in § 25 eingeführte Funktion q_n in der Form

$$(73.)\qquad q_n=\sum_a 2^{\sigma_a}A_a s^{(a)}=\sum_a 2^{\frac{\sigma_a+1+\varepsilon}{2}}A_a\chi_a s^{(a)}$$

schreiben. Hieraus folgt aber, daß *der Ausdruck $2^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}q_n$ die zu dem Hauptcharakter zweiter Art gehörende Charakteristik darstellt.*

Allgemeiner betrachte man das Produkt

$$q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots q_{\nu_m}. \qquad (\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n)$$

Dieser Ausdruck ist gleich

*) Vgl. die Formeln (42.) und (43.) des § 17.

$$\left\{\sum \frac{1}{\alpha_{11}!\,\alpha_{31}!\cdots}\left(\frac{2s_1}{1}\right)^{\alpha_{11}}\left(\frac{2s_3}{3}\right)^{\alpha_{31}}\cdots\right\}\left\{\sum \frac{1}{\alpha_{12}!\,\alpha_{32}!\cdots}\left(\frac{2s_1}{1}\right)^{\alpha_{12}}\left(\frac{2s_3}{3}\right)^{\alpha_{32}}\cdots\right\}\cdots,$$

wo die Summationsindizes den Bedingungen

$$\nu_1=\alpha_{11}+3\alpha_{31}+\cdots,\quad \nu_2=\alpha_{12}+3\alpha_{32}+\cdots,\quad \ldots$$

zu unterwerfen sind. Wird nun

$$\alpha_1=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\cdots,\quad \alpha_3=\alpha_{31}+\alpha_{32}+\cdots$$

gesetzt, so läßt sich der Ausdruck auch in der Form

$$\sum \frac{2^{\alpha_1+\alpha_3+\cdots}s_1^{\alpha_1}s_3^{\alpha_3}\cdots}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\,3^{\alpha_3}\alpha_3!\cdots}\sum \frac{\alpha_1!}{\alpha_{11}!\,\alpha_{12}!\cdots}\cdot\frac{\alpha_3!}{\alpha_{31}!\,\alpha_{32}!\cdots}\cdots$$

schreiben. Hat daher c_a dieselbe Bedeutung wie in § 31, so wird

$$q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots q_{\nu_m}=\sum_a 2^{\sigma_a}A_a c_a s^{(a)}.$$

Beachtet man noch die Gleichung (72.), so erhält man

$$q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots q_{\nu_m}=\sum_a 2^{\frac{\sigma_a+m+\mu}{2}}A_a\xi_a s^{(a)}.$$

Daher stellt der Ausdruck

$$(74.)\qquad 2^{-\frac{m+\mu}{2}}q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots q_{\nu_m}$$

die zu dem in § 31 *bestimmten Charakter* $\xi(T)$ *von* $\mathfrak{T}_n$ *gehörende Charakteristik dar.* Hierbei ist μ wie früher gleich Null oder Eins zu setzen, je nachdem $n-m$ gerade oder ungerade ist.

Wir können auch unmittelbar ein Komplement $\gamma_{(\nu)}$ der Charakteristik (74.) angeben. Unter Berücksichtigung der für den Charakter $\xi(T)$ gewonnenen Resultate ergibt sich nämlich folgende Regel:

Sind zwei der Zahlen $\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m$ *einander gleich, so ist der Ausdruck* (74.) *eine zweiseitige Charakteristik mit dem Komplement Null. Sind dagegen diese Zahlen voneinander verschieden, so stellt der Ausdruck für* $\mu=0$ *eine zweiseitige, für* $\mu=1$ *eine nicht zweiseitige Charakteristik dar. Ein Komplement der Charakteristik* (74.) *erhält man, indem man*

$$\gamma_{(\nu)}=\sqrt{(-1)^{\frac{n-m+\mu}{2}}\cdot\frac{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}{2^\mu}},\quad \gamma_{(\lambda)}=0$$

setzt. Hierbei bedeutet (ν) *die Klasse der Permutationen von* $\mathfrak{S}_n$, *die in genau* m *Zykeln der Ordnungen* $\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_m$ *zerfallen, während* (λ) *irgendeine von* (ν) *verschiedene Klasse ist.*

§ 34. Ich wende mich nun zur Betrachtung der *einfachen* Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{T}_n$.

Man bezeichne wie in § 17 mit

$$\chi^{(1)}(T),\ \chi^{(2)}(T),\ \dots\ \chi^{(v_n)}(T)$$

v_n verschiedene einfache Charaktere zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$, unter denen nicht zwei einander assoziiert sind. Dann ist jeder einfache Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$ einem dieser v_n Charaktere entweder gleich oder assoziiert. Die zu $\chi^{(\varrho)}(T)$ gehörende Charakteristik sei

$$\Phi^{(\varrho)} = \sum_{\alpha} 2^{\frac{\sigma_\alpha}{2}} A_\alpha \chi_\alpha^{(\varrho)} s^{(\alpha)}.$$

Da nun zwei assoziierten Charakteren dieselbe Charakteristik entspricht, so *stellen die v_n Ausdrücke $\Phi^{(\varrho)}$ die einzigen einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{T}_n$ dar.* Es sei noch bemerkt, daß der Koeffizient von s_1^n in $\Phi^{(\varrho)}$ gleich ist $\frac{2^{\frac{n}{2}} f_\varrho}{n!}$, wo f_ϱ den Grad des Charakters $\chi^{(\varrho)}(T)$ bedeutet; *dieser Koeffizient hat also einen positiven Wert.*

Wird wie in § 17 unter ε_ϱ die Zahl Null oder Eins verstanden, je nachdem der Charakter $\chi^{(\varrho)}(T)$ zweiseitig ist oder nicht, und bedeutet $e_{\varkappa\lambda}$ die Zahl Null oder Eins, je nachdem $\varkappa$ von λ verschieden oder gleich λ ist, so lassen sich die Formeln (39.), (40.), (44.) und (45.) des § 17 folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{\alpha} A_\alpha \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\alpha^{(\sigma)} = \frac{e_{\varrho\sigma}}{2^{\varepsilon_\varrho}}, \tag{75.}$$

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\beta^{(\varrho)} = \frac{e_{\alpha\beta}}{A_\alpha}. \tag{76.}$$

Man führe nun neben den Variablen $x_1, x_2, \dots x_r$, als deren Potenzsummen die Größen s_λ definiert worden sind, r neue Variable $x_1', x_2', \dots x_r'$ ein und setze entsprechend

$$t_\lambda = x_1'^\lambda + x_2'^\lambda + \cdots + x_r'^\lambda, \quad t^{(\alpha)} = t_1^{\alpha_1} t_3^{\alpha_3} \cdots$$

und

$$\Phi_1^{(\varrho)} = \sum_{\alpha} 2^{\frac{\sigma_\alpha}{2}} A_\alpha \chi_\alpha^{(\varrho)} t^{(\alpha)}.$$

Dann wird

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \Phi^{(\varrho)} \Phi_1^{(\varrho)} = \sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \Big(\sum_{\alpha,\beta} 2^{\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}} A_\alpha A_\beta \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\beta^{(\varrho)} s^{(\alpha)} t^{(\beta)} \Big)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} 2^{\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}} A_\alpha A_\beta s^{(\alpha)} t^{(\beta)} \Big(\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\beta^{(\varrho)} \Big).$$

Auf Grund der Formel (76.) ergibt sich hieraus

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \Phi^{(\varrho)} \Phi_1^{(\varrho)} = \sum_{a} 2^{\sigma_a} A_a s^{(a)} t^{(a)}.$$

Der rechts stehende Ausdruck wird aber (vgl. Formel (73.)) mit Hilfe der r^2 Produkte

$$x_1 x_1', x_1 x_2', \ldots x_1 x_r', \ \ldots \ x_r x_1', x_r x_2', \ldots x_r x_r'$$

ebenso gebildet, wie der Ausdruck q_n mit Hilfe der r Größen $x_1, x_2, \ldots x_r$, und kann daher passend mit $q_n(xx')$ bezeichnet werden. Es besteht also die Gleichung

$$\sum_{\varrho} 2^{\varepsilon_\varrho} \Phi^{(\varrho)} \Phi_1^{(\varrho)} = q_n(xx'). \tag{77.}$$

Die Wichtigkeit dieser Formel geht aus folgender Überlegung hervor. Es seien uns v_n (nicht verschwindende) Funktionen

$$\Psi^{(\varrho)} = \sum_{a} 2^{\frac{\sigma_a}{2}} A_a \zeta_a s^{(a)}$$

gegeben, von denen bekannt ist, daß sie als (einfache oder zusammengesetzte) Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ betrachtet werden dürfen. Man setze η_ϱ gleich Null oder Eins, je nachdem $\Psi^{(\varrho)}$ eine zweiseitige oder nicht zweiseitige Charakteristik ist; ferner sei

$$\Psi_1^{(\varrho)} = \sum_{a} 2^{\frac{\sigma_a}{2}} A_a \zeta_a t^{(a)}.$$

Es gilt dann der Satz:

Besteht für die v_n Funktionen $\Psi^{(\varrho)}$ die der Gleichung (77.) *analoge Gleichung*

$$\sum_{\varrho} 2^{\eta_\varrho} \Psi^{(\varrho)} \Psi_1^{(\varrho)} = q_n(xx'), \tag{78.}$$

so stimmen diese Funktionen, abgesehen von der Reihenfolge und von den Vorzeichen, mit den v_n einfachen Charakteristiken $\Phi^{(\varrho)}$ überein.

Es sei nämlich $\zeta^{(\varrho)}(T)$ der Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$, zu dem die Charakteristik $\Psi^{(\varrho)}$ gehört. Dann ist $\zeta^{(\varrho)}(T)$ eine ganzzahlige lineare homogene Verbindung der $v_n + u_n$ einfachen Charaktere zweiter Art, die sich für die Gruppe $\mathfrak{T}_n$ angeben lassen. Ist hierbei $p_{\varrho\sigma}$ der Koeffizient von $\chi^{(\sigma)}(T)$, so kommt, falls $\zeta^{(\varrho)}(T)$ ein zweiseitiger und $\chi^{(\sigma)}(T)$ ein nicht zweiseitiger Charakter ist, auch dem zu $\chi^{(\sigma)}(T)$ assoziierten Charakter derselbe Koeffizient $p_{\varrho\sigma}$ zu. Hieraus folgt leicht, daß

$$\zeta_a^{(\varrho)} = \sum_{\sigma} r_{\varrho\sigma} \chi_a^{(\sigma)} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots v_n)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Psi^{(\varrho)} = \sum_{\sigma} r_{\varrho\sigma} \Phi^{(\sigma)}$$

gesetzt werden darf, wo die $r_{\varrho\sigma}$ gewisse ganze Zahlen sind, welche noch

die Eigenschaft besitzen, daß auch $2^{\eta_\varrho - \varepsilon_\sigma} r_{\varrho\sigma}$ stets ganzzahlig ist. Die Summe

$$r_\varrho = \sum_\sigma 2^{\eta_\varrho - \varepsilon_\sigma} r_{\varrho\sigma}^2$$

ist daher eine positive ganze Zahl, die nur dann gleich Eins wird, wenn unter den Zahlen $r_{\varrho 1}, r_{\varrho 2}, \ldots$ eine gleich ± 1, die übrigen gleich Null sind.

Um also zu zeigen, daß $\pm \Psi^{(\varrho)}$ für jedes ϱ einer der Funktionen $\Phi^{(\sigma)}$ gleich wird, haben wir nur nachzuweisen, daß jede der v_n Zahlen r_ϱ gleich Eins ist. Dies ergibt sich aber wie folgt: Setzt man die Koeffizienten von $s^{(\alpha)} t^{(\alpha)}$ auf beiden Seiten der Gleichung (78.) einander gleich, so erhält man

$$\sum_\varrho 2^{\eta_\varrho} \zeta_\alpha^{(\varrho)2} = \sum_\varrho 2^{\eta_\varrho} \sum_{\sigma,\tau} r_{\varrho\sigma} r_{\varrho\tau} \chi_\alpha^{(\sigma)} \chi_\alpha^{(\tau)} = \frac{1}{A_\alpha}.$$

Man multipliziere hier mit A_α und summiere über alle v_n Klassen $[\alpha]$. Dann ergibt sich wegen (75.)

$$\sum_\varrho 2^{\eta_\varrho} \sum_\sigma \frac{r_{\varrho\sigma}^2}{2^{\varepsilon_\sigma}} = \sum_\varrho r_\varrho = v_n.$$

Wäre nun eine der Zahlen r_ϱ von Eins verschieden, also größer als Eins, so müßte ihre Summe größer als v_n ausfallen, was auf einen Widerspruch führt.

Wir haben uns noch zu vergewissern, daß die v_n Ausdrücke $\pm \Psi^{(\varrho)}$, von denen wir bereits nachgewiesen haben, daß sie einfache Charakteristiken sind, untereinander verschieden sein müssen. Wäre dies aber nicht der Fall, so würde aus

$$q_n(xx') = \sum_\varrho 2^{\varepsilon_\varrho} \Phi^{(\varrho)} \Phi_1^{(\varrho)} = \sum_\varrho 2^{\eta_\varrho} \Psi^{(\varrho)} \Psi_1^{(\varrho)}$$

offenbar eine Gleichung der Form

$$\sum_\varrho c_\varrho \Phi^{(\varrho)} \Phi_1^{(\varrho)} = 0$$

folgen, wo nicht alle c_ϱ verschwinden. Eine solche Beziehung ist aber nicht möglich. Denn setzt man in dem links stehenden Ausdruck den Koeffizienten von $s^{(\alpha)} t^{(\beta)}$ gleich Null, so ergibt sich

$$\sum_\varrho c_\varrho A_\alpha A_\beta \chi_\alpha^{(\varrho)} \chi_\beta^{(\varrho)} = 0,$$

und hieraus folgt, indem man mit $\chi_\alpha^{(\sigma)} \chi_\beta^{(\sigma)}$ multipliziert und nach α und β addiert, auf Grund der Gleichungen (75.)

$$\sum_\varrho c_\varrho \frac{e_{\varrho\sigma} e_{\varrho\sigma}}{2^{2\varepsilon_\varrho}} = \frac{c_\sigma}{2^{2\varepsilon_\sigma}} = 0.$$

Dies widerspricht aber der über die Zahlen c_ϱ gemachten Annahme.

Abschnitt IX.

Über die Funktionen $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$.

§ 35. In diesem Abschnitt soll eine Klasse von symmetrischen Funktionen der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_r$ studiert werden, von denen ich im nächsten Abschnitt nachweisen werde, daß sie, abgesehen von konstanten Faktoren, mit den einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ übereinstimmen.

Ich betrachte wieder die Gleichung

$$f(z)=\frac{(1+x_1z)(1+x_2z)\cdots(1+x_rz)}{(1-x_1z)(1-x_2z)\cdots(1-x_rz)}=q_0+q_1z+q_2z^2+\cdots, \qquad (q_0=1)$$

die zur Definition der Funktionen q_ν dient. Hierbei soll r nicht kleiner sein als die von uns betrachtete Zahl n. — Beachtet man, daß

$$\frac{1+x_\varkappa z}{1-x_\varkappa z}=1+2x_\varkappa z+2x_\varkappa^2 z^2+\cdots$$

ist, so erhält man leicht

$$(79.) \qquad q_\nu=\Sigma 2^\lambda x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_r^{\alpha_r},$$

wo die Summe über alle nicht negativen ganzen Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r$ zu erstrecken ist, die der Bedingung $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=\nu$ genügen, und der Exponent λ angibt, wie viele unter den Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r$ von Null verschieden sind.

Da $f(z)f(-z)=1$, also

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu q_\nu z^\nu\Big)=1$$

ist, so ergibt sich für $\nu>0$

$$(80.) \qquad q_\nu-q_1q_{\nu-1}+q_2q_{\nu-2}-\cdots+(-1)q_\nu=0.$$

Setzt man daher

$$(81.) \qquad Q_{\varkappa,\lambda}=q_\varkappa q_\lambda-2q_{\varkappa+1}q_{\lambda-1}+2q_{\varkappa+2}q_{\lambda-2}-\cdots+(-1)^\lambda 2q_{\varkappa+\lambda},$$

so wird

$$Q_{\varkappa,\lambda}=-Q_{\lambda,\varkappa};$$

die Ausdrücke $Q_{\varkappa,\lambda}$ bilden also ein alternierendes System.

Ich definiere nun, wenn $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m$ beliebige positive ganze Zahlen sind, den Ausdruck $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ durch folgende Festsetzungen: *Ist m gerade, so soll $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ den mit Hilfe der m^2 Größen Q_{ν_α,ν_β} gebildeten Pfaffschen Ausdruck bedeuten, der in bekannter Weise aus der Rekursionsformel*

$$(82.) \qquad Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=Q_{\nu_1,\nu_2}Q_{\nu_3,\nu_4,\dots\nu_m}-Q_{\nu_1,\nu_3}Q_{\nu_2,\nu_4,\dots\nu_m}+\cdots+Q_{\nu_1,\nu_m}Q_{\nu_2,\nu_3,\dots\nu_{m-1}}$$

zu bestimmen ist. Für ein ungerades m soll aber

(83.) $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m} = q_{\nu_1} Q_{\nu_2,\nu_3,\dots\nu_m} - q_{\nu_2} Q_{\nu_1,\nu_3,\dots\nu_m} + \cdots + q_{\nu_m} Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_{m-1}}$

sein. Außerdem setze ich noch

$$Q_{\nu_1} = q_{\nu_1}.$$

Man erkennt leicht, daß $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ in $-Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ übergeht, wenn zwei der Indizes vertauscht werden; daher wird $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=0$, wenn zwei Indizes einander gleich sind. Offenbar ist in jedem Fall $Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ ein ganzzahliges Polynom der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_r$, das symmetrisch und homogen vom Grade $\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_m$ ist.

§ 36. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z)$ liefert die Gleichung

$$(84.) \qquad f(z) = 1 + 2\sum_{\beta=1}^{r} \frac{x_\beta z}{p_\beta(1-x_\beta z)},$$

wo

$$(85.) \qquad p_\beta = \frac{(x_\beta - x_1)\cdots(x_\beta - x_{\beta-1})(x_\beta - x_{\beta+1})\cdots(x_\beta - x_r)}{(x_\beta + x_1)\cdots(x_\beta + x_{\beta-1})(x_\beta + x_{\beta+1})\cdots(x_\beta + x_r)}$$

zu setzen ist, und hieraus folgt für $\nu > 0$

$$q_\nu = 2\sum_{\beta=1}^{r} \frac{x_\beta^\nu}{p_\beta}.$$

Setzt man in (84.) $z=-\frac{1}{x_a}$, so ergibt sich, da $f(-\frac{1}{x_a})=0$ ist,

$$\sum_{\beta=1}^{r} \frac{2x_\beta}{p_\beta(x_a + x_\beta)} = 1.$$

Daher ist

$$Q_{\varkappa,1} = q_\varkappa q_1 - 2q_{\varkappa+1} = 4\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{x_\alpha^\varkappa x_\beta}{p_\alpha p_\beta} - 4\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{x_\alpha^{\varkappa+1}}{p_\alpha}$$

$$= 4\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{x_\alpha^\varkappa x_\beta}{p_\alpha p_\beta} - 4\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{x_\alpha^{\varkappa+1}}{p_\alpha p_\beta}\cdot\frac{2x_\beta}{x_\alpha + x_\beta}$$

$$= 4\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{x_\alpha^\varkappa x_\beta}{p_\alpha p_\beta}\frac{x_\beta - x_\alpha}{x_\beta + x_\alpha}.$$

Mit Hilfe der sich aus (81.) ergebenden Gleichung

$$Q_{\varkappa,\lambda} = q_\varkappa q_\lambda - q_{\varkappa+1} q_{\lambda-1} - Q_{\varkappa+1,\lambda-1}$$

zeigt man leicht, daß auch für $\lambda > 1$

$$Q_{\varkappa,\lambda} = 4\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{x_\alpha^\varkappa x_\beta^\lambda}{p_\alpha p_\beta}\frac{x_\beta - x_\alpha}{x_\beta + x_\alpha}$$

ist. Ich will nun allgemeiner zeigen, daß, wenn

$$A(u_1, u_2, \dots u_m) = \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{u_\varkappa + u_\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m)$$

gesetzt wird,

$$(86.) \quad Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m} = 2^m \sum_{a_1,a_2,\dots a_m=1}^{r} \frac{x_{a_1}^{\nu_1} x_{a_2}^{\nu_2}\cdots x_{a_m}^{\nu_m}}{p_{a_1} p_{a_2}\cdots p_{a_m}} A(x_{a_m}, x_{a_{m-1}}, \dots x_{a_2}, x_{a_1})$$

wird.

Diese Formel läßt sich leicht mit Hilfe der Gleichungen (82.) und (83.) verifizieren, wenn wir zeigen können, daß für ein gerades m die Gleichung

$$(87.)\quad \begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots u_m) &= A(u_1, u_2) A(u_3, u_4, \dots u_m) \\ &- A(u_1, u_3) A(u_2, u_4, \dots u_m) + \dots + A(u_1, u_m) A(u_2, \dots u_{m-1}) \end{aligned}$$

und für ein ungerades m die Gleichung

$$(88.)\quad \begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots u_m) &= A(u_2, u_3, \dots u_m) \\ &- A(u_1, u_3, \dots u_m) + \dots + A(u_1, u_2, \dots u_{m-1}) \end{aligned}$$

besteht.

Der Beweis der Formeln (87.) und (88.) läßt sich nun folgendermaßen führen. Man bezeichne, wenn m gerade ist, mit $A'(u_1, u_2, \dots u_m)$ den mit Hilfe des alternierenden Systems

$$\frac{u_\varrho - u_\sigma}{u_\varrho + u_\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots m)$$

gebildeten *Pfaff*schen Ausdruck. Dann ist also

$$A'(u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}$$

und

$$(89.)\quad \begin{aligned} A'(u_1, u_2, \dots u_m) &= A'(u_1, u_2) A'(u_3, u_4, \dots u_m) \\ &- A'(u_1, u_3) A'(u_2, u_4, \dots u_m) + \dots + A'(u_1, u_m) A'(u_2, u_3, \dots u_{m-1}). \end{aligned}$$

Nun ist aber bekanntlich

$$A'^2(u_1, u_2, \dots u_m) = \left| \frac{u_\varrho - u_\sigma}{u_\varrho + u_\sigma} \right|.$$

Folglich verschwindet $A'(u_1, u_2, \dots u_m)$, wenn zwei der Variabeln $u_1, u_2, \dots u_m$ einander gleich werden. Da außerdem beide Ausdrücke

$$A'(u_1, u_2, \dots u_m) \prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho + u_\sigma) \quad \text{und} \quad \prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho - u_\sigma)$$

ganze rationale Funktionen sind, die homogen und von demselben Grade $\frac{m(m-1)}{2}$ sind, so muß, wenn c_m der Koeffizient von $u_1^{m-1} u_2^{m-2} \dots u_m$ in dem ersten der beiden Ausdrücke ist,

$$A'(u_1, u_2, \dots u_m) \prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho + u_\sigma) = c_m \prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho - u_\sigma)$$

sein. Multipliziert man aber die Gleichung (89.) mit $\prod_{\varrho<\sigma} (u_\varrho + u_\sigma)$ und vergleicht auf beiden Seiten die Koeffizienten von $u_1^{m-1} u_2^{m-2} \dots u_m$, so erhält man leicht

$$c_m = c_{m-2} - c_{m-2} + \dots + c_{m-2} = c_{m-2}.$$

Da nun $c_2 = 1$ ist, so ist stets $c_m = 1$, und folglich ergibt sich

$$A'(u_1, u_2, \dots u_m) = A(u_1, u_2, \dots u_m).$$

Schreibt man nun in (89.) A für A', so erhält man die zu beweisende Formel (87.). Setzt man ferner in dieser Gleichung $u_1 = 0$ und beachtet, daß

$$A(0, u_2, \dots u_m) = (-1)^{m-1} A(u_2, u_3, \dots u_m) = -A(u_2, u_3, \dots u_m)$$

ist, so erhält man eine Formel, aus der die Gleichung (88.) hervorgeht, indem man $u_2, u_3, \dots u_m$ durch $u_1, u_2, \dots u_{m-1}$ ersetzt und für $m-1$ wieder m schreibt.

§ 37. Von zwei Potenzprodukten

$$A x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots x_r^{\varkappa_r}, \quad B x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_r^{\lambda_r}$$

soll, wie üblich, das erste Produkt von höherer Ordnung heißen als das zweite, wenn die erste nicht verschwindende unter den Differenzen

$$\varkappa_1 - \lambda_1, \ \varkappa_2 - \lambda_2, \dots \varkappa_r - \lambda_r$$

positiv ist. Unter dem *Leitglied* einer ganzen rationalen Funktion $\varphi(x_1, x_2, \dots x_r)$ verstehe ich das Produkt höchster Ordnung, das in φ auftritt, und unter dem Leitglied einer gebrochenen rationalen Funktion $\psi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ den Quotienten der Leitglieder von φ_1 und φ_2. Sind dann $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_k$ beliebige ganze oder gebrochene rationale Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_r$, deren Leitglieder sich nicht allein um konstante Faktoren voneinander unterscheiden, so ist das Leitglied von

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_k,$$

wie man leicht schließt, gleich demjenigen der Leitglieder von $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_k$, dem die höchste Ordnung zukommt.

Das Leitglied der Funktion $Q_\nu = q_\nu$ der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_r$ ist, wie aus (79.) folgt, gleich $2x_1^\nu$. Allgemeiner beweise ich:

VIII. *Ist* $\nu_1 > \nu_2 > \cdots \nu_m > 0$ *und* $m \leqq r$*), so ist das Leitglied von* $Q_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ *gleich* $2^m x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m}$.

Dies folgt aus der Formel (86.). In der Tat ist das Leitglied des durch die Gleichung (85.) definierten Ausdrucks p_β gleich $(-1)^{\beta-1}$, das Leitglied von $A(x_{a_m}, x_{a_{m-1}}, \dots x_{a_1})$ ist gleich ± 1 und speziell das von $A(x_m, x_{m-1}, \dots x_1)$ gleich $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$. In der in (86.) rechts stehenden Summe hat daher der Summand

$$2^m \frac{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m}}{p_1 p_2 \cdots p_m} A(x_m, x_{m-1}, \dots x_1)$$

*) Für $m > r$ wird $Q_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m} = 0$.

das Leitglied

$$2^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}-1-2-\cdots-(m-1)}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_m^{\nu_m}=2^m x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_m^{\nu_m},$$

während die Leitglieder der übrigen Summanden für $\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_m$ jedenfalls von niedrigerer Ordnung sind.

Es bedeute nun, wie früher, k_n die Anzahl der Zerlegungen

$$n=\nu_1+\nu_2+\cdots \qquad (\nu_1\geqq\nu_2\geqq\cdots)$$

der ganzen Zahl n in positive ganzzahlige Summanden. Von zwei Zerlegungen

$$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots,\quad n=\mu_1+\mu_2+\cdots$$

soll die erste von *höherer Ordnung heißen als die zweite, wenn die erste nicht verschwindende unter den Differenzen* $\lambda_1-\mu_1, \lambda_2-\mu_2, \ldots$ *positiv ist.* Ich denke mir die $k=k_n$ Zerlegungen von n derart angeordnet, daß zuerst diejenigen kommen, bei denen die Summanden untereinander verschieden sind. Diese $v=v_n$ Zerlegungen sollen, nach abnehmender Ordnung geschrieben, mit

$$(1),\ (2),\ \ldots\ (v)$$

bezeichnet werden, so daß also insbesondere (1) die Zerlegung $n=n$ bedeutet. Unter

$$(v+1),\ (v+2),\ \ldots\ (k)$$

verstehe ich die übrigen $k-v$ Zerlegungen von n, irgendwie angeordnet. Die Anzahl der Summanden in der Zerlegung (ν) sei gleich m_ν.

Bedeutet ferner (ν) die Zerlegung $n=\nu_1+\nu_2+\cdots$, so bezeichne ich mit $q^{(\nu)}$ das Produkt $q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots$, mit $Q^{(\nu)}$ die Funktion $Q_{\nu_1,\nu_2,\ldots}$ und mit ξ_ν die monogene symmetrische Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_r$, die als Summe aller Produkte der Form $x_{a_1}^{\nu_1}x_{a_2}^{\nu_2}\cdots$ erscheint. Das Leitglied von ξ_ν ist dann gleich $x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots$. Ist nun $\nu\leqq v$, so ist $Q^{(\nu)}$ nach Satz VIII eine symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_r$, deren Leitglied mit dem Leitglied von $2^{m_\nu}\xi_\nu$ übereinstimmt, dagegen sind die Ausdrücke $Q^{(v+1)}, Q^{(v+2)}, \ldots Q^{(k)}$ sämtlich Null.

Ist die Zerlegung (λ) der Zahl n von höherer Ordnung als die Zerlegung (μ), *so soll auch das Produkt* $q^{(\lambda)}$ *von höherer Ordnung heißen als das Produkt* $q^{(\mu)}$. Da nun wegen (80.)

$$q_a^2=2q_{a+1}q_{a-1}-2q_{a+2}q_{a-2}+\cdots+(-1)^{a-1}2q_{2a}$$

ist, so ergibt sich leicht, daß jedes Produkt $q^{(\lambda)}$ für $\lambda>v$ in der Form

$$q^{(\lambda)}=a_1q^{(1)}+a_2q^{(2)}+\cdots+a_vq^{(v)}$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots a_v$ gewisse ganze durch 2 teilbare Zahlen sind,

und zwar können hierin nur solche unter den Produkten $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots q^{(v)}$ wirklich vorkommen, die von höherer Ordnung sind als das Produkt $q^{(\lambda)}$. Aus den Formeln (81.), (82.) und (83.), die zur Berechnung der Ausdrücke $Q^{(\nu)}$ dienen, geht ferner leicht hervor, daß $Q^{(\nu)}$ für $\nu \leqq v$ die Form

$$q^{(\nu)} + b_1 q^{(\nu')} + b_2 q^{(\nu'')} + \cdots$$

hat, wo $q^{(\nu')}, q^{(\nu'')}, \dots$ von höherer Ordnung sind als das Produkt $q^{(\nu)}$, und $b_1, b_2, \dots$ ganze Zahlen bedeuten, die sämtlich gerade sind. Infolge der erwähnten Eigenschaft der Produkte $q^{(v+1)}, q^{(v+2)}, \dots q^{(k)}$ ergibt sich daher für $\nu \leqq v$

$$Q^{(\nu)} = q^{(\nu)} + c_1 q^{(\nu-1)} + c_2 q^{(\nu-2)} + \cdots + c_{\nu-1} q^{(1)};$$

hierbei bedeuten $c_1, c_2, \dots c_{\nu-1}$ wieder gewisse gerade ganze Zahlen. Da nun insbesondere $q^{(1)} = q_n = Q^{(1)}$ ist, so läßt sich umgekehrt $q^{(\nu)}$ in der Form

$$q^{(\nu)} = Q^{(\nu)} + d_1 Q^{(\nu-1)} + d_2 Q^{(\nu-2)} + \cdots + d_{\nu-1} Q^{(1)}$$

darstellen, wo auch $d_1, d_2, \dots d_{\nu-1}$ gerade ganze Zahlen sind.

Hieraus folgt, daß *jede homogene symmetrische ganze rationale Funktion n-ten Grades von $x_1, x_2, \dots x_r$, die sich als ganze rationale Funktion von $q_1, q_2, \dots$ (oder, was dasselbe ist, als ganze rationale Funktion der Potenzsummen $s_1, s_3, s_5, \dots$) ausdrücken läßt, zugleich als lineare homogene Verbindung von $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots Q^{(v)}$ darstellbar ist*). Diese Darstellung ist eindeutig bestimmt, denn die Ausdrücke $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots Q^{(v)}$ sind als Funktionen mit untereinander verschiedenen Leitgliedern linear unabhängig. Es ergibt sich zugleich, daß unter den k Produkten $q^{(\lambda)}$ nur v linear unabhängig sind; insbesondere besitzen die v Produkte $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots q^{(v)}$ diese Eigenschaft. Ich füge noch folgende Bemerkung hinzu: Man habe einen Ausdruck der Form

$$F = e_0 q^{(\nu)} + e_1 q^{(\nu-1)} + \cdots + e_{\nu-1} q^{(1)}, \qquad (\nu \leqq v)$$

der, als lineare Verbindung der monogenen symmetrischen Funktionen $\xi_1, \xi_2, \dots$ dargestellt, die Glieder $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{\nu-1}$ nicht enthält. *Dann muß, wie ich behaupte, $F = e_0 Q^{(\nu)}$ sein.* Denn man denke sich F in der Form

$$F = g_1 Q^{(1)} + g_2 Q^{(2)} + \cdots + g_v Q^{(v)}$$

dargestellt. Wären nun die Zahlen $g_1, g_2, \dots g_{\nu-1}$ nicht sämtlich Null und ist $g_{\nu-\lambda}$ die erste nicht verschwindende unter ihnen, so müßte F, durch

*) Hierin ist ein bemerkenswerter Satz aus der Theorie der symmetrischen Funktionen enthalten: Ist S eine symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \dots x_r$, die als ganze rationale Funktion der Potenzsummen $s_1, s_3, s_5, \dots$ darstellbar ist, so sind in dem Leitglied $A x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots$ von S die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \dots$ untereinander verschieden.

$x_1, x_2, \dots x_r$ ausgedrückt, das Glied $2^{m_\nu - \lambda} g_{\nu-\lambda}\, \xi_{\nu-\lambda}$ enthalten, was unserer Annahme widerspricht. Würden ferner die Zahlen $g_{\nu+1}, g_{\nu+2}, \dots$ nicht sämtlich verschwinden, so sei $g_{\nu+\mu}$ die letzte, die nicht Null ist. Drückt man dann alle $Q^{(\lambda)}$ durch $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots q^{(v)}$ aus, so müßte in F das Glied $g_{\nu+\mu} q^{(\nu+\mu)}$ vorkommen, was nicht der Fall ist. Daher ist $F = g_\nu Q^{(\nu)}$; da aber $Q^{(\nu)}$ das Glied $q^{(\nu)}$ mit dem Koeffizienten 1 enthält, so ergibt sich $g_\nu = e_0$, also $F = e_0 Q^{(\nu)}$.

Ist außerdem noch bekannt, daß der Koeffizient von ξ_ν in der Entwicklung von F gleich e_0' ist, so muß nach VIII $e_0' = 2^{m_\nu} e_0$ sein.

§ 38. Stellt man das Produkt $q^{(\lambda)}$ als Funktion von $x_1, x_2, \dots x_r$ dar, so erhält man eine Gleichung der Form

$$q^{(\lambda)} = \sum_{\mu=1}^{k} a_{\lambda\mu} \xi_\mu ,$$

wo die $a_{\lambda\mu}$ gewisse ganze Zahlen sind. Speziell wird, da $q^{(1)} = q_n$ und $\xi_1 = x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n$ ist, wegen (79.) $a_{11} = 2$. Da die Ausdrücke $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k$ linear unabhängig sind und unter den k Produkten $q^{(\lambda)}$ nur v linear unabhängige vorkommen, so ist die Determinante k-ten Grades $|a_{\lambda\mu}|$ genau vom Range v. Ich setze nun

$$D_\nu = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1\nu} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2\nu} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \dots a_{\nu\nu} \end{vmatrix}, \quad F^{(\nu)} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1,\nu-1}, q^{(1)} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2,\nu-1}, q^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \dots a_{\nu,\nu-1}, q^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

wobei noch $F^{(1)} = q^{(1)}$ sein soll. Dann wird offenbar einerseits

$$F^{(\nu)} = D_{\nu-1} q^{(\nu)} + D'_{\nu-1} q^{(\nu-1)} + \dots + D^{(\nu-1)}_{\nu-1} q^{(1)},$$

wo $D'_{\nu-1}, \dots, D^{(\nu-1)}_{\nu-1}$ gewisse Determinanten des Grades $\nu-1$ bedeuten, andererseits

$$F^{(\nu)} = D_\nu \xi_\nu + \Delta'_\nu \xi_{\nu+1} + \Delta''_\nu \xi_{\nu+2} + \dots ,$$

wo $\Delta'_\nu, \Delta''_\nu, \dots$ Determinanten ν-ten Grades sind. Auf Grund der am Schluß des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung ergibt sich daher für $\nu = 1, 2, \dots v$

$$F^{(\nu)} = D_{\nu-1} Q^{(\nu)}, \quad D_\nu = 2^{m_\nu} D_{\nu-1}, \tag{90.}$$

wobei noch $D_0 = 1$ zu setzen ist; hieraus folgt

$$D_\nu = 2^{m_1 + m_2 + \dots + m_\nu} . \qquad (\nu = 1, 2, \dots v) \tag{91.}$$

Sind nun $x_1', x_2', \dots x_r'$ neue r Variable, so mögen die Ausdrücke ξ_ν, $Q^{(\nu)}$ und $F^{(\nu)}$ in ξ'_ν, $Q_1^{(\nu)}$ und $F_1^{(\nu)}$ übergehen, wenn an Stelle der Variabeln x_α die Variabeln x'_α treten. Hat dann $q_n(xx')$ dieselbe Bedeutung wie in § 34, so wird

$$\frac{(1+x_1x_1'z)(1+x_1x_2'z)\cdots(1+x_rx_r'z)}{(1-x_1x_1'z)(1-x_1x_2'z)\cdots(1-x_rx_r'z)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu(xx')z^\nu.$$

Da sich aber der links stehende Ausdruck in der Form

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu x_1'^\nu z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu x_2'^\nu z^\nu\Big)\cdots\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu x_r'^\nu z^\nu\Big)$$

entwickeln läßt, so erhält man offenbar

$$q_n(xx')=\sum_{\lambda=1}^{k}q^{(\lambda)}\xi_\lambda'=\sum_{\lambda,\mu}a_{\lambda\mu}\xi_\mu\xi_\lambda'.$$

Beachtet man noch, daß $q_n(xx')$ ungeändert bleibt, wenn x_a und x_a' vertauscht werden, so ergibt sich $a_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}$.

Die Funktion $q_n(xx')$ läßt sich also als symmetrische Bilinearform der Variabeln $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_k$ und $\xi_1',\xi_2',\dots\xi_k'$ auffassen. Da nun der Rang der Determinante $|a_{\lambda\mu}|$ gleich v ist und die Hauptunterdeterminanten $D_1,D_2,\dots D_v$ von Null verschieden sind, so wird nach einer bekannten von *Jacobi* herrührenden Formel

$$q_n(xx')=\frac{1}{D_1}F^{(1)}F_1^{(1)}+\frac{1}{D_1D_2}F^{(2)}F_1^{(2)}+\cdots+\frac{1}{D_{v-1}D_v}F^{(v)}F_1^{(v)},$$

und *hieraus folgt wegen* (90.) *und* (91.) *die für das folgende wichtige Gleichung*

(92.) $$q_n(xx')=\frac{1}{2^{m_1}}Q^{(1)}Q_1^{(1)}+\frac{1}{2^{m_2}}Q^{(2)}Q_1^{(2)}+\cdots+\frac{1}{2^{m_v}}Q^{(v)}Q_1^{(v)}.$$

Abschnitt X.

Bestimmung der einfachen Charaktere der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$.

§ 39. Mit Hilfe der im letzten Abschnitt gewonnenen Resultate gelingt es nun leicht, die früher eingeführten einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ explizite darzustellen.

Es sei

$$n=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m \qquad (\nu_1\geq\nu_2\geq\cdots\geq\nu_m>0)$$

und $Q^{(\nu)}=Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$. Dann gilt folgende Regel, die auf Grund der Formeln (81.), (82.) und (83.) leicht zu beweisen ist:

Ist

$$q^{(\lambda)}=q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots q_{\lambda_l} \qquad (\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_l>0)$$

ein von $q^{(\nu)}=q_{\nu_1}q_{\nu_2}\cdots q_{\nu_m}$ verschiedenes Produkt, das in der Darstellung von $Q^{(\nu)}$ als lineare homogene Verbindung von $q^{(1)},q^{(2)},\dots q^{(v)}$ wirklich vorkommt, so kann l nur einen der Werte

$$m,\ m-1,\ \dots\ m-\left[\frac{m}{2}\right]$$

annehmen. Der Koeffizient c_λ von $q^{(\lambda)}$ ist ferner eine ganze Zahl, die für $l<m$ durch 2^{m-l} und für $l=m$ durch 2 teilbar ist.

Man setze nun μ, bzw. μ' gleich Null oder Eins, je nachdem $n-m$, bzw. $n-l$ gerade oder ungerade ist. Dann stellen, wie wir wissen (vgl. § 33), die Ausdrücke

$$\psi = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} q^{(\nu)}, \quad \psi' = \frac{1}{2^{\frac{l+\mu'}{2}}} q^{(\lambda)}$$

zwei Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ dar. Ich beweise nun:

Der Ausdruck

$$\Psi^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} Q^{(\nu)}$$

ist ebenso wie der Ausdruck ψ für $\mu = 0$ eine zweiseitige und für $\mu = 1$ eine nicht zweiseitige Charakteristik von $\mathfrak{T}_n$. Ferner läßt sich jedes Komplement der Charakteristik ψ zugleich auch als Komplement der Charakteristik $\Psi^{(\nu)}$ auffassen.

Aus

$$Q^{(\nu)} = q^{(\nu)} + c_\lambda q^{(\lambda)} + \cdots$$

folgt nämlich

$$\Psi^{(\nu)} = \psi + 2^{\frac{l-m+\mu'-\mu}{2}} c_\lambda \psi' + \cdots.$$

Ist nun $l = m$, also $\mu' = \mu$, so erhält man im zweiten Glied rechts $c_\lambda \psi'$, und dies ist, da c_λ gerade ist, das Zweifache einer Charakteristik, also eine Charakteristik mit dem Komplement Null. Ist ferner $l < m$, so wird, da c_λ alsdann durch 2^{m-l} teilbar ist,

$$2^{\frac{l-m+\mu'-\mu}{2}} c_\lambda \psi' = 2^{\frac{m-l+\mu'-\mu}{2}} \frac{c_\lambda}{2^{m-l}} \psi'$$

im allgemeinen wieder das Zweifache einer Charakteristik. Eine Ausnahme kann nur im Falle

$$l = m-1, \quad \mu = 1$$

eintreten; dann wird aber $\mu' = 0$, und folglich ist ψ', also auch

$$2^{\frac{l-m+\mu'-\mu}{2}} c_\lambda \psi' = \frac{c_\lambda}{2} \psi'$$

eine zweiseitige Charakteristik. Jedenfalls ergibt sich, daß $\Psi^{(\nu)}$ aus ψ dadurch hervorgeht, daß zu ψ für $\mu = 1$ gewisse zweiseitige Charakteristiken und für $\mu = 0$ nur zweiseitige Charakteristiken mit dem Komplement Null hinzuaddiert werden. Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf die Ausführungen des § 32 die Richtigkeit unserer Behauptung.

Setzt man nun noch $\mu = \eta_\nu$, so folgt aus (92.)

$$q_n(xx') = \sum_{\nu=1}^{v} \frac{1}{2^{m_\nu}} Q^{(\nu)} Q_1^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{v} 2^{\eta_\nu} \Psi^{(\nu)} \Psi_1^{(\nu)}.$$

Auf Grund des in § 34 Bewiesenen ergibt sich daher, daß *die* $v = v_n$ *Ausdrücke* $\Psi^{(\nu)}$, *abgesehen von den Vorzeichen, mit den gesuchten einfachen Charakteristiken* $\Phi^{(\nu)}$ *der Gruppe* $\mathfrak{T}_n$ *übereinstimmen.* Wir können also $\Phi^{(\nu)} = \pm \Psi^{(\nu)}$ setzen.

§ 40. Um noch zu zeigen, daß $\Phi^{(\nu)} = + \Psi^{(\nu)}$ ist, haben wir nur nachzuweisen, daß die Entwicklung von $\Psi^{(\nu)}$ oder, was dasselbe ist, von $Q^{(\nu)}$ nach Potenzen von $s_1, s_3, s_5, \ldots$ das Glied s_1^n mit positivem Koeffizienten enthält.

Es sei dieser Koeffizient gleich $\frac{2^n g^{(\nu)}}{n!}$; wir setzen noch, falls $Q^{(\nu)} = Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ ist,

$$g^{(\nu)} = g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}.$$

Dann wird zunächst, da

$$Q^{(1)} = q_n = \frac{(2s_1)^n}{n!} + \frac{(2s_1)^{n-3}(2s_3)}{(n-3)!\,3} + \cdots$$

ist,

$$g^{(1)} = g_n = 1.$$

Ferner erhält man aus (81.)

$$\frac{g_{\varkappa, \lambda}}{(\varkappa+\lambda)!} = \frac{1}{\varkappa!\,\lambda!} - \frac{2}{(\varkappa+1)!\,(\lambda-1)!} + \frac{2}{(\varkappa+2)!\,(\lambda-2)!} - \cdots + (-1)^{\lambda}\frac{2}{(\varkappa+\lambda)!},$$

und hieraus folgt leicht

$$g_{\varkappa, \lambda} = \frac{(\varkappa+\lambda)!}{\varkappa!\,\lambda!} \cdot \frac{\varkappa-\lambda}{\varkappa+\lambda}.$$

Allgemeiner ist, wie ich zeigen will,

$$(93.) \qquad g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} = \frac{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m)!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!} \prod_{\alpha<\beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta}.$$

Unter Benutzung der in § 36 eingeführten Bezeichnung läßt sich diese Formel in der Gestalt

$$(93'.) \qquad g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} = \frac{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m)!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!} A(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m)$$

schreiben. Es sei dies bereits bewiesen, wenn an Stelle von m eine kleinere Zahl tritt. Dann erhält man, falls m gerade ist, aus der Gleichung (82.) durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $(2s_1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}$ wegen (87.)

$$\begin{aligned}\frac{g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}}{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m)!} &= \frac{g_{\nu_1, \nu_2}}{(\nu_1+\nu_2)!} \cdot \frac{g_{\nu_3, \nu_4, \ldots \nu_m}}{(\nu_3+\nu_4+\cdots+\nu_m)!} - \frac{g_{\nu_1, \nu_3}}{(\nu_1+\nu_3)!} \cdot \frac{g_{\nu_2, \nu_4, \ldots \nu_m}}{(\nu_2+\nu_4+\cdots+\nu_m)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}\{A(\nu_1, \nu_2) A(\nu_3, \nu_4, \ldots \nu_m) - A(\nu_1, \nu_3) A(\nu_2, \nu_4, \ldots \nu_m) + \cdots\} \\ &= \frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!} A(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m).\end{aligned}$$

Ebenso folgt für ein ungerades m aus (83.) und (88.)

$$\frac{g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}}{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m)!}=\frac{1}{\nu_1!}\frac{g_{\nu_2,\nu_3,\dots\nu_m}}{(\nu_2+\nu_3+\cdots+\nu_m)!}-\frac{1}{\nu_2!}\cdot\frac{g_{\nu_1,\nu_3,\dots\nu_m}}{(\nu_1+\nu_3+\cdots+\nu_m)!}+\cdots$$
$$=\frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}\{A(\nu_2,\nu_3,\dots\nu_m)-A(\nu_1,\nu_3,\dots\nu_m)+\cdots\}$$
$$=\frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}A(\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m).$$

Aus der nun bewiesenen Gleichung (93.) erkennt man, daß die Zahlen $g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ für den uns allein interessierenden Fall $\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_m$ in der Tat positiv sind, und daß daher *die v Ausdrücke $\Psi^{(\nu)}$ die einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ repräsentieren.*

Es ist noch zu bemerken, daß die Zahlen $g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ ganze Zahlen sind. Dies ergibt sich, indem man die oben benutzten Rekursionsformeln in der Gestalt

$$g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=\binom{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}{\nu_1+\nu_2}g_{\nu_1,\nu_2}g_{\nu_3,\nu_4,\dots\nu_m}$$
$$-\binom{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}{\nu_1+\nu_3}g_{\nu_1,\nu_3}g_{\nu_2,\nu_4,\dots\nu_m}+\cdots$$

bzw.

$$g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=\binom{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}{\nu_1}g_{\nu_2,\nu_3,\dots\nu_m}-\binom{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}{\nu_2}g_{\nu_1,\nu_3,\dots\nu_m}+\cdots$$

schreibt und außerdem noch beachtet, daß

$$g_{\varkappa,\lambda}=\frac{(\varkappa+\lambda)!}{\varkappa!\,\lambda!}\frac{\varkappa-\lambda}{\varkappa+\lambda}=\binom{\varkappa+\lambda}{\varkappa}-2\binom{\varkappa+\lambda-1}{\varkappa}$$

eine ganze Zahl ist.

§ 41. Setzt man wie früher

$$\Psi^{(\nu)}=\Phi^{(\nu)}=\sum_\alpha 2^{\frac{\sigma_\alpha}{2}}A_\alpha\chi_\alpha^{(\nu)}s^{(\alpha)},$$

so wird

$$Q^{(\nu)}=Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=2^{\frac{m+\mu}{2}}\Phi^{(\nu)}=\sum_\alpha 2^{\frac{\sigma_\alpha+m+\mu}{2}}A_\alpha\chi_\alpha^{(\nu)}s^{(\alpha)}.$$

Da $n-\sigma_\alpha$ und $n-m-\mu$ gerade Zahlen sind, so wird hier jeder der Faktoren $2^{\frac{\sigma_\alpha+m+\mu}{2}}$ eine ganze Zahl, und hieraus folgt auch, daß *die $\chi_\alpha^{(\nu)}$ rationale und mithin (als Summen von Einheitswurzeln) ganze rationale Zahlen sind.* Für den Grad

$$f^{(\nu)}=f_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$$

des einfachen Charakters $\chi^{(\nu)}(T)$ von $\mathfrak{S}_n$, zu dem die Charakteristik $\Phi^{(\nu)}$ gehört, erhält man durch Betrachtung des Koeffizienten von s_1^n in $Q^{(\nu)}$

$$f_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=2^{\frac{n-m-\mu}{2}}g_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}=2^{\frac{n-m-\mu}{2}}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_m!}\prod_{\alpha<\beta}\frac{\nu_\alpha-\nu_\beta}{\nu_\alpha+\nu_\beta}.$$

Ist $\mu = 0$, so ist $\chi^{(\nu)}(T)$ ein zweiseitiger Charakter und daher durch die Charakteristik $\Phi^{(\nu)}$ vollständig bestimmt. Ist aber $\mu = 1$, so haben wir noch für die ungeraden Klassen (λ) von $\mathfrak{S}_n$ die Zahlen $\chi^{(\nu)}_{(\lambda)}$ anzugeben. Ebenso haben wir für $\mu = 0$ noch das Komplement $\delta^{(\nu)}_{(\lambda)}$ von $\chi^{(\nu)}(T)$ zu bestimmen. — Es genügt aber hierzu, das in § 33 bestimmte Komplement $\gamma_{(\varrho)}$ der Charakteristik

$$\psi = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} q_{\nu_1} q_{\nu_2} \cdots q_{\nu_m}$$

zu betrachten, das, wie wir wissen, zugleich als ein Komplement von $\Psi^{(\nu)} = \Phi^{(\nu)}$ angesehen werden kann. Es war

$$\gamma_{(\nu)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+\mu}{2}} \frac{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}{2^\mu}}$$

für die Klasse (ν), deren Permutationen in genau m Zykeln der Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ zerfallen, und $\gamma_{(\lambda)} = 0$ für alle von (ν) verschiedenen Klassen (λ). Ist nun $\bar{\gamma}_{(\varrho)}$ die zu $\gamma_{(\varrho)}$ konjugiert komplexe Zahl, so wird, wenn $h_{(\varrho)}$ die Anzahl der Permutationen der Klasse (ϱ) bedeutet, insbesondere

$$h_{(\nu)} = \frac{n!}{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m}$$

und folglich

$$\sum_{\varrho} h_{(\varrho)} \gamma_{(\varrho)} \bar{\gamma}_{(\varrho)} = \frac{n!}{2^\mu}.$$

Hieraus folgt aber auf Grund des in § 32 Gesagten, daß wir für $\mu = 1$

$$\chi^{(\nu)}_{(\varrho)} = \gamma_{(\varrho)}$$

und für $\mu = 0$

$$\delta^{(\nu)}_{(\varrho)} = \gamma_{(\varrho)}$$

setzen dürfen.

Ich will noch die gewonnenen Resultate zusammenfassen.

IX. *Jeder Zerlegung*

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m > 0)$$

der Zahl n in lauter verschiedene Summanden entspricht ein einfacher Charakter zweiter Art $\chi(T)$ der Gruppe $\mathfrak{T}_n$, dessen Grad gleich

$$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} = 2^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{n!}{\nu_1! \nu_2! \cdots \nu_m!} \prod_{\alpha < \beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta}$$

ist. Um die Zahlen $\chi(T)$ sämtlich zu kennen, hat man nur die zugehörigen (in § 17 gekennzeichneten) Größen $\chi_{a_1, a_3, \ldots}$ und $\chi_{(\varrho)}$ anzugeben. Die Zahlen $\chi_{a_1, a_3, \ldots}$ werden dadurch erhalten, daß man den Ausdruck $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ als Funktion der Potenzsummen $s_1, s_3, \ldots$ berechnet; setzt man nämlich μ gleich Null

oder Eins, je nachdem $n-m$ gerade oder ungerade ist, so wird

$$Q_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m} = \sum_{a_1+3a_3+\dots=n} 2^{\frac{m+\mu+a_1+a_3+\dots}{2}} \frac{\chi_{a_1,a_3,\dots}}{1^{a_1}a_1!\,3^{a_3}a_3!\dots} s_1^{a_1} s_3^{a_3} \dots .$$

Ist $\mu=1$, so wird $\chi(T)$ ein nicht zweiseitiger Charakter; für jede ungerade Klasse (λ) von $\mathfrak{S}_n$, die von der Klasse (ν), deren Permutationen in genau m Zykeln der Ordnungen $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m$ zerfallen, verschieden ist, wird dann $\chi_{(\lambda)}=0$, dagegen ist

$$\chi_{(\nu)} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \nu_1\nu_2\cdots\nu_m} .$$

Durchläuft ferner B die Elemente der Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{T}_n$, so repräsentieren die Zahlen $\chi(B)$ einen einfachen Charakter zweiter Art $\varphi(B)$ von $\mathfrak{B}_n$.

Ist dagegen $\mu=0$, so ist $\chi(T)$ ein zweiseitiger Charakter. Man erhält dann in den Zahlen $\chi(B)$ einen Charakter von $\mathfrak{B}_n$, der als die Summe zweier adjungierter einfacher Charaktere $\psi(B)$ und $\overline{\psi}(B)$ erscheint. Die Differenz $\delta(B)=\psi(B)-\overline{\psi}(B)$ ist im allgemeinen Null; nur dann, wenn B einer Permutation von $\mathfrak{S}_n$ entspricht, die in genau m Zykeln der Ordnungen $\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m$ zerfällt, wird

$$\delta(B) = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-m}{2}} \nu_1\nu_2\cdots\nu_m} .$$

Sieht man zwei assoziierte Charaktere von $\mathfrak{T}_n$ als nicht voneinander verschieden an, so erhält man auf diese Weise, indem man alle v_n Zerlegungen von n in lauter verschiedene Summanden in Betracht zieht, die sämtlichen einfachen Charaktere zweiter Art der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$.

§ 42. Zu dem Charakter $\chi(T)$, der durch die Zerlegung $n=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_m$ bestimmt ist, gehört eine irreduzible Kollineationsgruppe $\mathfrak{K}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ des Grades $f_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$, die der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorph ist, und die sich, wenn $n\geqq 4$ ist, nicht als Gruppe von $n!$ linearen homogenen Substitutionen schreiben läßt. Ist $n-m$ ungerade, so ist die der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{L}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ von $\mathfrak{K}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ wieder irreduzibel. Ist aber $n-m$ gerade, so zerfällt diese Untergruppe in zwei der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ isomorphe irreduzible Kollineationsgruppen $\mathfrak{L}'_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ und $\mathfrak{L}''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$ des Grades $\frac{1}{2}f_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_m}$; diese beiden Gruppen sind jedoch, da sie als adjungierte Gruppen erscheinen, nach den Ergebnissen des § 19 als nicht wesentlich verschieden anzusehen.

Jede irreduzible Kollineationsgruppe, die der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorph ist und nicht als Gruppe von $n!$ linearen homogenen Substitutionen ge-

schrieben werden kann, ist einer der v_n Gruppen $\mathfrak{R}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ äquivalent. Dasselbe gilt, wenn n von 6 und 7 verschieden ist, auch für die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ in bezug auf die Kollineationsgruppen $\mathfrak{L}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$, $\mathfrak{L}'_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ und $\mathfrak{L}''_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$.

Ich stelle hier noch für $n = 4, 5, \ldots 9$ die Werte der Zahlen $f_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ zusammen. Hierbei beziehen sich die überstrichenen Zahlen $\bar{f}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ auf diejenigen Zerlegungen von n, für die $n - m$ gerade ist, zu denen also eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ als Kollineationsgruppe des Grades $\frac{1}{2}\bar{f}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ gehört:

$n = 4,\ f_4 = 2,\ \bar{f}_{31} = 4;$

$n = 5,\ \bar{f}_5 = 4,\ f_{41} = 6,\ f_{32} = 4;$

$n = 6,\ f_6 = 4,\ \bar{f}_{51} = 16,\ \bar{f}_{42} = 20,\ f_{321} = 4;$

$n = 7,\ \bar{f}_7 = 8,\ f_{61} = 20,\ f_{52} = 36,\ f_{43} = 20,\ \bar{f}_{421} = 28;$

$n = 8,\ f_8 = 8,\ \bar{f}_{71} = 48,\ \bar{f}_{62} = 112,\ \bar{f}_{53} = 112,\ f_{521} = 64,\ f_{431} = 48;$

$n = 9,\ \bar{f}_9 = 16,\ f_{81} = 56,\ f_{72} = 160,\ f_{63} = 224,\ \bar{f}_{621} = 240,\ f_{54} = 112,$
$\bar{f}_{531} = 336,\ \bar{f}_{432} = 96.$

Die zu verschiedenen Zerlegungen der Zahl n gehörenden Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ sind im allgemeinen wesentlich voneinander verschieden (vgl. § 19). Eine Ausnahme kann nur für $n = 4$ und $n = 6$ eintreten. Für $n = 4$ sind die drei Gruppen $\mathfrak{L}_4$, $\mathfrak{L}'_{3,1}$ und $\mathfrak{L}''_{3,1}$ des Grades 2 als nicht verschieden anzusehen; dies erklärt sich aus dem Vorhandensein dreier linearer Charaktere bei der Gruppe $\mathfrak{B}_4$. Für $n = 6$ können, wie aus unserer Tabelle zu erkennen ist, nur die quaternären Gruppen $\mathfrak{R}_6$ und $\mathfrak{R}_{3,2,1}$, bzw. $\mathfrak{L}_6$ und $\mathfrak{L}_{3,2,1}$, übereinstimmen. Diese Gruppen gehen in der Tat vermittelst des bekannten äußeren Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{S}_6$, bzw. $\mathfrak{A}_6$, durch den dem Zyklus (123) die Permutation (135)(246) zugeordnet wird, auseinander hervor (vgl. § 19). Man kann dies durch Betrachtung der zugehörigen Charaktere der Gruppen $\mathfrak{T}_6$ und $\mathfrak{B}_6$ ohne Mühe erkennen. Doch will ich hierauf nicht weiter eingehen, da bereits *H. Maschke**) gezeigt hat, daß jede der Gruppen $\mathfrak{S}_6$ und $\mathfrak{A}_6$ im wesentlichen nur einer quaternären Kollineationsgruppe isomorph ist.

§ 43. Der besseren Übersicht wegen will ich hier noch die von Herrn *Frobenius***) gewonnenen Resultate über die Darstellung der Gruppen

*) Math. Annalen, Bd. 51, S. 251.

**) Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten.

$\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ durch homogene lineare Substitutionen anführen: Jeder Zerlegung

(94.) $$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l \qquad (\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_l > 0)$$

der Zahl n in gleiche oder verschiedene Summanden entspricht eine der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorphe irreduzible Gruppe $\mathfrak{G}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ linearer homogener Substitutionen in

$$\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l} = \frac{n!}{(\lambda_1 + l - 1)!\,(\lambda_2 + l - 2)! \cdots \lambda_l!} \prod_{\alpha < \beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta + \beta - \alpha)$$

Variabeln; hierbei sind jedoch die beiden Zerlegungen

$$n = n, \quad n = 1 + 1 + \cdots + 1$$

nicht mitzuzählen*). Sind μ_α unter den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ größer oder gleich α, so ist auch

(94′.) $$n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m. \qquad (m = \lambda_1)$$

Stimmen nun die Zerlegungen (94.) und (94.′), die man als *assoziierte* Zerlegungen bezeichnet, nicht überein, so geht die Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m}$ aus der Gruppe $\mathfrak{G}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ dadurch hervor, daß man jede ihrer Substitutionen mit $+1$ oder -1 multipliziert, je nachdem die zugehörige Permutation von $\mathfrak{S}_n$ gerade oder ungerade ist; ferner ist die der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{G}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ wieder irreduzibel. Ist dagegen die Zerlegung (94.) mit der assoziierten Zerlegung (94′.) identisch, so zerfällt diese Untergruppe von $\mathfrak{G}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ in zwei irreduzible Substitutionsgruppen in je $\frac{1}{2}\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ Variabeln. Die beiden so entstehenden mit $\mathfrak{A}_n$ isomorphen Gruppen sind aber nicht als wesentlich voneinander verschieden anzusehen: bedeutet nämlich T die Transposition (12), so kann die eine Gruppe aus der andern dadurch erhalten werden, daß man die der Permutation P von $\mathfrak{A}_n$ entsprechende lineare Substitution durch die der Permutation $T^{-1}PT$ entsprechende ersetzt**). — Betrachtet man wieder zwei äquivalente Substitutionsgruppen als nicht voneinander verschieden, so erhält man in der geschilderten Weise die sämtlichen irreduziblen Gruppen homogener linearer Substitutionen, die den Gruppen $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ isomorph sind.

Die folgende Tabelle enthält für $n = 4, 5, \ldots 9$ die zugehörigen Zahlen $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$; hierbei wird von zwei assoziierten Zerlegungen der Zahl n nur

---

*) Diesen Zerlegungen entsprechen die trivialen Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ durch die Zahlen 1, bzw. 1 und -1.

**) Die beiden Gruppen sind also als adjungierte Gruppen zu bezeichnen (vgl. Einleitung).

eine angeführt. Die überstrichenen Zahlen beziehen sich auf diejenigen Zerlegungen, die sich selbst assoziiert sind, denen also eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ als lineare homogene Substitutionsgruppe in $\frac{1}{2}\overline{\varphi}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l}$ Variabeln entspricht:

$n=4$, $\varphi_{31}=3$, $\overline{\varphi}_{22}=2$;*)

$n=5$, $\varphi_{41}=4$, $\overline{\varphi}_{311}=6$;

$n=6$, $\varphi_{51}=5$, $\varphi_{42}=9$, $\varphi_{411}=10$, $\varphi_{33}=5$, $\overline{\varphi}_{321}=16$;

$n=7$, $\varphi_{61}=6$, $\varphi_{52}=14$, $\varphi_{511}=15$, $\varphi_{43}=14$, $\varphi_{421}=35$, $\overline{\varphi}_{4111}=20$, $\varphi_{331}=21$;

$n=8$, $\varphi_{71}=7$, $\varphi_{62}=20$, $\varphi_{611}=21$, $\varphi_{53}=28$, $\varphi_{521}=64$, $\varphi_{5111}=35$, $\varphi_{44}=14$, $\varphi_{431}=70$, $\varphi_{422}=56$, $\overline{\varphi}_{4211}=90$, $\overline{\varphi}_{332}=42$;

$n=9$, $\varphi_{81}=8$, $\varphi_{72}=27$, $\varphi_{711}=28$, $\varphi_{63}=48$, $\varphi_{621}=105$, $\varphi_{6111}=56$, $\varphi_{54}=42$, $\varphi_{531}=162$, $\varphi_{522}=120$, $\varphi_{5211}=189$, $\overline{\varphi}_{51111}=70$, $\varphi_{441}=84$, $\varphi_{432}=168$, $\varphi_{4311}=216$, $\overline{\varphi}_{333}=42$.

§ 44. Aus den obigen Tabellen erkennt man, daß für kleinere Werte von n unter den Zahlen $f_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$ die Zahl $f_n=2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ und unter den Zahlen $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l}$ (für $n>4$) die Zahl $\varphi_{n-1,1}=n-1$ am kleinsten ist. Ich will zeigen, daß diese Regel allgemein richtig ist; genauer ist für $n>6$

$$f_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m} > 2 f_n \qquad (m>1) \tag{95.}$$

und, falls nicht

$$\lambda_1=n-1,\ \lambda_2=1 \text{ oder } \lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=\dots=1\ **)$$

ist,

$$\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l} > 2(n-1). \tag{96.}$$

Um die Ungleichung (95.) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für die in § 40 eingeführten Zahlen $g_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m}$, falls

$$n=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_m>6,\ \nu_1>\nu_2>\dots>\nu_m>0,\ m>1$$

ist, die Ungleichung

$$g_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m} > 2^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \tag{97.}$$

besteht. — Dies kann man folgendermaßen erkennen. Setzt man, wie in § 36,

$$A(u_1, u_2, \dots u_m)=\prod_{\varkappa<\lambda}\frac{u_\varkappa-u_\lambda}{u_\varkappa+u_\lambda},$$

so ergibt sich mit Hilfe der Formeln (87.) und (88.) ohne Mühe für jedes u

---

*) Die zugehörige Gruppe $\mathfrak{G}_{2,2}$ ist der Gruppe $\mathfrak{S}_4$ *nicht* einstufig isomorph.

**) Diese beiden Zerlegungen von n sind einander assoziiert, daher ist $\varphi_{2,1,1,\dots 1}=\varphi_{n-1,1}=n-1$.

$$(u_1+u_2+\cdots+u_m)A(u_1, u_2, \ldots u_m) = \sum_{\varkappa=1}^{m} u_\varkappa A(u_1, \ldots u_{\varkappa-1}, u_\varkappa - u, u_{\varkappa+1}, \ldots u_m).$$

Hieraus folgt wegen (93′.)

(98.) $$g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} = g_{\nu_1-1, \nu_2, \ldots \nu_m} + g_{\nu_1, \nu_2-1, \ldots \nu_m} + \cdots + g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{m-1}, \nu_m-1},$$

wo auf der rechten Seite für $\nu_m = 1$ unter $g_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{m-1}, 0}$ die Zahl $g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{m-1}}$ zu verstehen ist; außerdem hat man, falls $\nu_\alpha = \nu_{\alpha+1}+1$ ist, den α-ten Summanden gleich Null zu setzen.

Man nehme nun die Ungleichung (97.), die für $n = 7, 8, 9$ mit Hilfe der Tabelle der $f_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$ sofort zu verifizieren ist, als richtig an, wenn die Summe der Indizes $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ kleiner als n ist. Ist dann nicht

$$\nu_1 = m,\ \nu_2 = m-1, \ldots \nu_{m-1} = 2,\ \nu_m = 1,$$

so steht in (98.) auf der rechten Seite mindestens eine Zahl $g_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m}$, bei der

$$\varkappa_1 > \varkappa_2 > \cdots > \varkappa_m > 0$$

ist. Da aber die Summe der $\varkappa$ gleich $n-1$ ist, so ergibt sich

$$g_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m} \geqq g_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m} > 2^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}.$$

In dem ausgeschlossenen Falle muß aber, da $m+m-1+\cdots+2+1 > 9$ angenommen werden darf, $m \geqq 4$ sein. Man erhält dann durch wiederholte Anwendung der Formel (98.)

$$g_{m, m-1, \ldots 2, 1} = g_{m, m-1, \ldots 4, 2, 1} + g_{m, m-1, \ldots 4, 3}$$
$$> 2^{\left[\frac{m-1}{2}\right]+1} + 2^{\left[\frac{m-2}{2}\right]+1} \geqq 2^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}.$$

In ähnlicher Weise beweist man die Ungleichung (96.) mit Hilfe der für die Zahlen $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l}$ bestehenden Rekursionsformel

$$\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l} = \varphi_{\lambda_1-1, \lambda_2, \ldots \lambda_l} + \varphi_{\lambda_1, \lambda_2-1, \ldots \lambda_l} + \cdots + \varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{l-1}, \lambda_l-1},$$

wo auf der rechten Seite für $\lambda_l = 1$ unter $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{l-1}, 0}$ die Zahl $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{l-1}}$ zu verstehen und für $\lambda_a = \lambda_{a+1}$ der α-te Summand gleich Null zu setzen ist*).

Abschnitt XI.

Die alternierenden Gruppen mit sechs und sieben Vertauschungsziffern.

§ 45. Während im allgemeinen die sämtlichen mit der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ isomorphen Kollineationsgruppen erhalten werden können, indem man die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ durch homogene lineare Substitutionen be-

*) Vgl. die Formel (3.) meiner Arbeit „Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen“, Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1908, S. 664.

trachtet, gilt dies nicht, wenn $n=6$ oder $n=7$ wird. Es sollen nunmehr diese beiden Ausnahmefälle erledigt werden.

In jeder Gruppe $\mathfrak{R}$ gebrochener linearer Substitutionen, die der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ isomorph ist, lassen sich, wie ich in § 4 gezeigt habe, die Proportionalitätsfaktoren bei den Koeffizienten der einzelnen Substitutionen so wählen, daß die Koeffizientenmatrizen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 der den Permutationen

$$A_1=(123),\ A_2=(12)(34),\ A_3=(12)(45),\ A_4=(12)(56)$$

entsprechenden Substitutionen folgenden Gleichungen genügen:

$$(99.)\quad \begin{cases} Q_1^3=Q_2^2=Q_3^2=Q_4^2=(Q_1Q_2)^3=(Q_1Q_3)^2=(Q_2Q_3)^3=(Q_3Q_4)^3=jE, \\ (Q_1Q_4)^2=kE,\quad Q_2Q_4=jQ_4Q_2, \end{cases}$$

wo j und k durch die Gruppe $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmte Einheitswurzeln sind, und zwar ist

$$k^6=1,\ j=k^3.$$

Hat man umgekehrt 4 Matrizen (homogene lineare Substitutionen) Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, für die Gleichungen der Form (99.) bestehen, wo j und k Konstanten sind, so muß von selbst $k^6=1$, $j=k^3$ werden. Ist m die kleinste positive Zahl, für die $k^m=1$ wird, so erzeugen die Q_a eine endliche Gruppe $\mathfrak{Q}$ der Ordnung $m\cdot 360$ und die zugehörigen 360 gebrochenen linearen Substitutionen bilden eine mit $\mathfrak{A}_6$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{R}$, die sich nicht in weniger als $m\cdot 360$ homogenen linearen Substitutionen schreiben läßt. Wählt man die Q_a so, daß $\mathfrak{Q}$ der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ oder der Gruppe $\mathfrak{B}_6$ isomorph wird, so wird $k=1$, $m=1$, bzw. $k=-1$, $m=2$. Es existieren hier aber auch Gruppen $\mathfrak{R}$, für die $m=3$ wird. Die einfachste dieser Gruppen ist die zuerst von Herrn *Valentiner* aufgestellte ternäre Kollineationsgruppe der Ordnung 360, die bekanntlich der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ isomorph ist. Um die *Valentiner*gruppe zu erhalten, hat man nämlich für Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 folgende lineare Substitutionen zu wählen:

(100.)

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
$x_1'=$	x_1	$\frac{1}{3}(-x_1+2x_2+2x_3)$	$-x_1$	$-x_2$
$x_2'=$	ϱx_2	$\frac{1}{3}(2x_1-x_2+x_3)$	$\bar{\varepsilon}x_3$	$-x_1$
$x_3'=$	$\varrho^2 x_3$	$\frac{1}{3}(2x_1+2x_2-x_3)$	εx_2	$-x_3$,

wo

$$\varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon = \frac{1}{4}(-1+i\sqrt{15}),\quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{15})$$

zu setzen ist. Diese vier Substitutionen genügen den Gleichungen (99.), wobei $j=1$, $k=\varrho$, also $m=3$ wird*).

Hieraus folgt zugleich:

Die Darstellungsgruppe $\mathfrak{G}_6$ der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ ist von der Ordnung $6\cdot 360$ *und kann als abstrakte Gruppe durch folgende Gleichungen definiert werden:*

$$C_1^3 = C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = (C_1C_2)^3 = (C_1C_3)^2 = (C_2C_3)^3 = (C_3C_4)^3 = K^3,$$
$$(C_1C_4)^2 = K,\ C_2C_4 = K^3C_4C_2,\ KC_\alpha = C_\alpha K,\ K^6 = E.$$

§ 46. Um nun eine Übersicht über alle mit $\mathfrak{A}_6$ isomorphe Kollineationsgruppen zu erhalten, hat man jetzt nur die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{G}_6$ zu berechnen. Hierzu haben wir vor allem die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}_6$ zu bestimmen.

Die 360 Permutationen von $\mathfrak{A}_6$ zerfallen in 7 Klassen ähnlicher Elemente, die durch die Permutationen

$$E,\ A=(123),\ B=(123)(456),\ C=(12)(34),\ D=(12)(3456),$$
$$F=(12345),\ F^2=(13524)$$

repräsentiert werden. Drückt man diese Permutationen durch die die Gruppe $\mathfrak{A}_6$ erzeugenden Elemente A_1, A_2, A_3, A_4 aus, so wird

$$A = A_1,\ B = A_1A_4A_3,\ C = A_2,\ D = A_4A_3A_2,\ F = A_3A_2A_1.$$

Setzt man entsprechend in der Gruppe $\mathfrak{G}_6$

$$A' = C_1,\ B' = C_1C_4C_3,\ C' = C_2,\ D' = C_4C_3C_2,\ F' = C_3C_2C_1$$

und bezeichnet die durch das Element R einer Gruppe definierte Klasse konjugierter Elemente mit (R), so verteilen sich, wie eine elementare Betrachtung lehrt, die $6\cdot 360$ Elemente von $\mathfrak{G}_6$ auf die 31 Klassen konjugierter Elemente

$$(K^\alpha),\ (A'),\ (KA'),\ (B'),\ (KB'),\ (C'),\ (KC'),\ (K^2C'),\ (K^\alpha D'),\ (K^\alpha F'),\ (K^\alpha F'^7)^{**}),$$

wo α die Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5 zu durchlaufen hat. Ferner ist

$$(A') = (K^2A') = (K^4A'),\ (B') = (K^2B') = (K^4B'),\ (C') = (K^3C').$$

---

*) Daß die *Valentiner*gruppe sich nicht in weniger als $3\cdot 360$ linearen homogenen Substitutionen schreiben läßt, hat zuerst Herr *Wiman* (Math. Annalen, Bd. 47, S. 531) nachgewiesen.

**) Das Element F' der Gruppe $\mathfrak{G}_6$ ist von der Ordnung $2\cdot 5$, daher ist nicht F'^2, sondern F'^7 von derselben Ordnung wie F'.

Bedeutet σ eine primitive sechste Einheitswurzel, etwa die Einheitswurzel

$$\sigma = -\varrho = \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

so gehört zu jedem einfachen Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{S}_6$ eine Zahl γ aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, so daß für jedes R

$$\chi(K^\alpha R) = \sigma^{\alpha\gamma}\chi(R) \tag{101.}$$

wird. *Dem Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{S}_6$ entspricht dann eine irreduzible mit $\mathfrak{A}_6$ isomorphe Kollineationsgruppe des Grades $f=\chi(E)$, für welche die früher betrachtete Zahl k gleich σ^γ wird. Diese Zahl $k=\sigma^\gamma$ ist bereits dadurch vollständig bestimmt, daß $\chi(K)=k\chi(E)$ ist.* Bezeichnet man nun mit l_γ die Anzahl der verschiedenen einfachen Charaktere von $\mathfrak{S}_6$, für die k gleich σ^γ wird, so erhält man*)

$$l_0=7,\ l_1=l_5=4,\ l_2=l_4=5,\ l_3=6.$$

Für jeden Charakter $\chi(R)$ genügt es, neben der Zahl

$$k=\frac{\chi(K)}{\chi(E)}$$

nur noch die Zahlen

$$\chi(E),\ \chi(A'),\ \chi(B'),\ \chi(C'),\ \chi(D'),\ \chi(F'),\ \chi(F'^7)$$

anzugeben, da sich die übrigen Zahlen $\chi(R)$ alsdann auf Grund der Formel (101.) und der Gleichung

$$\chi(S^{-1}RS)=\chi(R)$$

berechnen lassen. Da ferner für den zu $\chi(R)$ konjugiert komplexen Charakter an Stelle der Zahl k die Zahl $\bar{k}=\sigma^{-\gamma}$ tritt, so kann man sich auf die Betrachtung der Fälle

$$k=1,\ k=-1,\ k=\varrho,\ k=-\varrho$$

beschränken. In der Tabelle werden die diesen vier Fällen entsprechenden Charaktere durch die Zeichen $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ unterschieden. Zu den sechs in der Tabelle angeführten Charakteren ξ ist noch der Hauptcharakter $\xi_0(R)=1$ hinzuzunehmen. Unter $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind die Zahlen

$$\varkappa_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \varkappa_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

zu verstehen. Die Charaktere

$$\xi_3, \xi_4;\ \eta_3, \eta_4;\ \eta_5, \eta_6;\ \zeta_1, \zeta_2;\ \vartheta_1, \vartheta_2;\ \vartheta_3, \vartheta_4$$

---

*) Dies folgt aus dem Satz VI meiner mit D. zitierten Arbeit (vgl. das Zitat auf S. 159).

gehen auseinander hervor, indem man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, bzw. $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ vertauscht, was in der Tabelle in abgekürzter Weise angedeutet wird.

	ξ_1	ξ_2	$\xi_{3/4}$	ξ_5	ξ_6	η_1	η_2	$\eta_{3/4}$	$\eta_{5/6}$	$\zeta_{1/2}$	ζ_3	ζ_4	ζ_5	$\vartheta_{1/2}$	$\vartheta_{3/4}$
E	5	5	8	9	10	4	4	8	10	3	6	9	15	6	12
A'	2	−1	−1	0	1	2	−1	1	−1	0	0	0	0	0	0
B'	−1	2	−1	0	1	1	−2	−1	1	0	0	0	0	0	0
C'	1	1	0	1	−2	0	0	0	0	−1	2	1	−1	0	0
D'	−1	−1	0	1	0	0	0	0	$\pm\sqrt{2}$	1	0	1	−1	$\pm\sqrt{2}$	0
F'	0	0	$\varkappa_{1/2}$	−1	0	1	1	$-\varkappa_{1/2}$	0	$\varkappa_{1/2}$	1	−1	0	−1	$\varkappa_{1/2}$
F'^7	0	0	$\varkappa_{2/1}$	−1	0	1	1	$-\varkappa_{2/1}$	0	$\varkappa_{2/1}$	1	−1	0	−1	$\varkappa_{2/1}$

Die Charaktere ξ und η ergeben sich unmittelbar durch Betrachtung der von Herrn *Frobenius* bestimmten Charaktere der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ und der hier früher bestimmten Charaktere zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{B}_6$ (vgl. Satz IX). Die Charaktere ζ_1 und ζ_2 entsprechen der durch die Substitutionen (100.) erzeugten Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_6$ und der Darstellung, die aus dieser hervorgeht, indem man in (100.) ε und $\bar{\varepsilon}$ vertauscht. Die übrigen Charaktere habe ich folgendermaßen erhalten:

$$\zeta_3 = \bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1, \quad \zeta_4 = \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2, \quad \zeta_5 = \zeta_1 \xi_1$$
$$\vartheta_3 = \zeta_1 \eta_1, \quad \vartheta_4 = \zeta_2 \eta_1, \quad \vartheta_1 = \zeta_1 \eta_5 - \vartheta_3 - \vartheta_4, \quad \vartheta_2 = \zeta_1 \eta_6 - \vartheta_3 - \vartheta_4.$$

Hierbei bedeuten $\bar{\zeta}_1$ und $\bar{\zeta}_2$ die zu ζ_1 und ζ_2 konjugiert komplexen Charaktere.

§ 47. Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_7$ wird durch die Permutationen $A_1 = (123)$, $A_2 = (12)(34)$, $A_3 = (12)(45)$, $A_4 = (12)(56)$, $A_5 = (12)(67)$ erzeugt. Nach den Ergebnissen des § 4 lassen sich in jeder Gruppe $\mathfrak{R}$ gebrochener linearer Substitutionen, die mit $\mathfrak{A}_7$ isomorph ist, die diesen 5 Permutationen entsprechenden Substitutionen (bei passender Wahl der in ihnen enthaltenen Proportionalitätsfaktoren) so schreiben, daß ihre Koeffizientenmatrizen $Q_1, \ldots Q_5$ folgenden Gleichungen genügen:

$$(102.)\quad \begin{cases} Q_1^3 = Q_2^2 = Q_3^2 = Q_4^2 = Q_5^2 = jE, \\ (Q_1 Q_2)^3 = (Q_1 Q_3)^2 = (Q_1 Q_5)^2 = (Q_2 Q_3)^3 = (Q_3 Q_4)^3 = (Q_4 Q_5)^3 = jE, \\ (Q_1 Q_4)^2 = kE, \quad Q_2 Q_4 = j Q_4 Q_2, \quad Q_2 Q_5 = j Q_5 Q_2, \quad Q_3 Q_5 = j Q_5 Q_3, \end{cases}$$

wobei wieder $k^6 = 1$, $j = k^3$ wird. Für diese Gleichungen gilt in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}_7$ genau dasselbe, wie bei der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ für die Gleichungen (99.). Auch hier lassen sich Gruppen $\mathfrak{R}$ angeben, für die k eine primitive dritte Einheitswurzel wird. Die Gleichungen (102.) werden nämlich befriedigt, wenn man für $Q_1, \ldots Q_5$ folgende lineare homogene Substitutionen

in 6 Variabeln wählt, wobei $k=\varrho=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ wird:

(103.)

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
$x_1'=$	x_1	x_1	x_1	x_2	x_1
$x_2'=$	ϱx_2	x_2	$\frac{1}{2}(x_3+3x_6)$	x_1	x_3
$x_3'=$	$\varrho^2 x_3$	x_3	$\frac{1}{2}(x_2+3x_5)$	x_3	x_2
$x_4'=$	x_4	$\frac{1}{3}(-x_4+2x_5+2x_6)$	x_4	x_5	x_4
$x_5'=$	ϱx_5	$\frac{1}{3}(2x_4-x_5+2x_6)$	$\frac{1}{2}(x_3-x_6)$	x_4	x_6
$x_6'=$	$\varrho^2 x_6$	$\frac{1}{3}(2x_4+2x_5-x_6)$	$\frac{1}{2}(x_2-x_5)$	x_6	x_5.

Ich will noch eine andere Auflösung der Gleichungen (102.) durch lineare homogene Substitutionen in 6 Variabeln angeben, für die $k=-\varrho$ wird:

(104.)

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
$x_1'=$	$-x_1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ix_1+\sqrt{2}x_2)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-i\sqrt{2}x_1-2x_4)$	ix_2	ix_4
$x_2'=$	$-\varrho x_2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}x_1-ix_2)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-x_3+\delta x_6)$	ix_1	ix_3
$x_3'=$	$-\varrho^2 x_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ix_3+\sqrt{2}x_4)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(x_2-\delta x_5)$	ix_6	ix_2
$x_4'=$	$-x_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}x_1-ix_4)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1+i\sqrt{2}x_4)$	ix_5	ix_1
$x_5'=$	$-\varrho x_5$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ix_5+\sqrt{2}x_6)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{\delta}x_3+x_6)$	ix_4	ix_6
$x_6'=$	$-\varrho^2 x_6$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}x_5-ix_6)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-\bar{\delta}x_2-x_5)$	ix_3	ix_5.

Hierin ist

$$\delta=\sqrt{3}+i\sqrt{2},\quad \bar{\delta}=\sqrt{3}-i\sqrt{2}$$

zu setzen.

Die durch die Substitutionen (103.) und (104.) erzeugten Gruppen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ sind von den Ordnungen $3\cdot\frac{7!}{2}$ und $6\cdot\frac{7!}{2}$; die zugehörigen mit der Gruppe $\mathfrak{A}_7$ isomorphen Kollineationsgruppen lassen sich nicht in weniger als $3\cdot\frac{7!}{2}$, bzw. $6\cdot\frac{7!}{2}$ homogenen linearen Substitutionen schreiben.

Es ergibt sich zugleich der Satz:

Die Darstellungsgruppe $\mathfrak{C}_7$ der Gruppe $\mathfrak{A}_7$ ist von der Ordnung $6\cdot\frac{7!}{2}$ und kann als abstrakte Gruppe durch folgende Gleichungen definiert werden:

$$C_1^3 = C_2^2 = C_3^2 = C_4^2 = C_5^2 = K^3,\ K^6 = E,\ KC_\alpha = C_\alpha K,$$
$$(C_1C_2)^3 = (C_1C_3)^2 = (C_1C_5)^2 = (C_2C_3)^3 = (C_3C_4)^3 = (C_4C_5)^3 = K^3,$$
$$(C_1C_4)^2 = K,\ C_2C_4 = K^3C_4C_2,\ C_2C_5 = K^3C_5C_2,\ C_3C_5 = K^3C_5C_3.$$

Man erkennt auch, daß $\mathfrak{C}_7$ die früher betrachtete Gruppe $\mathfrak{C}_6$ als Untergruppe enthält.

§ 48. Es sollen nun die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{C}_7$ berechnet werden. Die $\frac{7!}{2} = 2520$ Permutationen von $\mathfrak{A}_7$ zerfallen in 9 Klassen ähnlicher Elemente, die durch die Permutationen

$$E,\ A=(123),\ B=(123)(456),\ C=(12)(34),\ D=(12)(3456),\ F=(12345),$$
$$G=(12)(34)(567),\ H=(1234567),\ H^{-1}=(1765432)$$

repräsentiert werden. Es ist ferner

$$A = A_1,\ B = A_1A_4A_3,\ C = A_2,\ D = A_4A_3A_2,\ F = A_3A_2A_1,$$
$$G = A_2A_5A_4,\ H = A_5A_4A_3A_2A_1.$$

Setzt man entsprechend in $\mathfrak{C}_7$

$$A' = C_1,\ B' = C_1C_4C_3,\ C' = C_2,\ D' = C_4C_3C_2,\ F' = C_3C_2C_1,$$
$$G' = C_2C_5C_4,\ H' = C_5C_4C_3C_2C_1,$$

so verteilen sich die $6 \cdot 2520$ Elemente von $\mathfrak{C}_7$ auf die 40 Klassen konjugierter Elemente

$$(K^\alpha), (A'), (KA'), (B'), (KB'), (C'), (KC'), (K^2C'), (K^\alpha D'), (K^\alpha F'),$$
$$(G'), (KG'), (K^2G'), (K^\alpha H'), (K^\alpha H'^{-1}),$$

wo α die Werte $0, 1, \ldots 5$ durchläuft. Ferner ist

$$(A') = (K^2A') = (K^4A'),\ (B') = (K^2B') = (K^4B').$$
$$(C') = (K^3C'),\ (G') = (K^3G').$$

Für die einfachen Charaktere $\chi(R)$ von $\mathfrak{C}_7$ gilt genau dasselbe wie für die Gruppe $\mathfrak{C}_6$ (vgl. § 45). Bedeutet wieder l_γ die Anzahl der Charaktere $\chi(R)$, für die

$$\chi(K^\alpha R) = \sigma^{\alpha\gamma}\chi(R) \qquad \left(\sigma = -\varrho = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

wird, so erhält man hier

$$l_0 = 9,\ l_1 = l_5 = 5,\ l_2 = l_4 = 7,\ l_3 = 7.$$

In der nachstehenden Tabelle werden wieder die den vier allein zu betrachtenden Fällen

$$\chi(K^\alpha R) = \chi(R),\ \chi(K^\alpha R) = (-1)^\alpha\chi(R),$$
$$\chi(K^\alpha R) = \varrho^\alpha\chi(R),\ \chi(K^\alpha R) = (-\varrho)^\alpha\chi(R)$$

entsprechenden Charaktere mit $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ bezeichnet. Auch hier wird der Hauptcharakter $\xi_0(R)=1$ nicht besonders angeführt. Für λ_1 und λ_2 hat man zu setzen

$$\lambda_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

	ξ_1	$\xi_{2/3}$	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	$\eta_{1/2}$	$\eta_{3/4}$	η_5	η_6	η_7	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	$\zeta_{6/7}$	$\vartheta_{1/2}$	$\vartheta_{3/4}$	ϑ_5
E	6	10	14	14	15	21	35	4	14	20	20	36	6	15	15	21	21	24	6	24	36
A'	3	1	2	−1	3	−3	−1	2	−2	4	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B'	0	1	−1	2	0	0	−1	1	−1	−1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C'	2	−2	2	2	−1	1	−1	0	0	0	0	0	2	−1	3	1	−3	0	0	0	0
D'	0	0	0	0	−1	−1	1	0	$\pm\sqrt{2}$	0	0	0	0	−1	1	−1	1	0	$\pm\sqrt{2}$	0	0
F'	1	0	−1	−1	0	1	0	1	1	0	0	−1	1	0	0	1	1	−1	−1	1	−1
G'	−1	1	2	−1	−1	1	−1	0	0	0	0	0	2	2	0	−2	0	0	0	0	0
H'	−1	$\lambda_{1/2}$	0	0	1	0	0	$-\lambda_{1/2}$	0	−1	−1	1	−1	1	1	0	0	$\lambda_{1/2}$	−1	$\lambda_{1/2}$	1
H'^{-1}	−1	$\lambda_{2/1}$	0	0	1	0	0	$-\lambda_{2/1}$	0	−1	−1	1	−1	1	1	0	0	$\lambda_{2/1}$	−1	$\lambda_{2/1}$	1

Die Charaktere ξ und η ergeben sich wieder aus den Charakteren der Gruppe $\mathfrak{A}_7$ und den Charakteren zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{B}_7$. Der Charakter ζ_1 entspricht der durch die Substitutionen (103.) erzeugten Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_7$. Zur Berechnung der übrigen Charaktere kann man sich folgender Gleichungen bedienen:

$$\zeta_2(R)=\frac{1}{2}[\bar{\zeta}_1^2(R)-\bar{\zeta}_1(K^2)], \quad \zeta_3=\bar{\zeta}_1^2-\zeta_1-\zeta_2, \quad \zeta_4=\zeta_1\xi_1-\zeta_3, \quad \zeta_5=\zeta_1\xi_6-\zeta_1\xi_5+\zeta_3,$$
$$\zeta_6=\zeta_1\xi_3-\zeta_2-\zeta_5, \quad \zeta_7=\zeta_1\xi_2-\zeta_2-\zeta_5; \quad \vartheta_3=\zeta_1\eta_1, \quad \vartheta_4=\zeta_1\eta_2, \quad \vartheta_5=\zeta_1\eta_3-\vartheta_3-\vartheta_4,$$
$$\vartheta_1=\zeta_3\eta_3-2\vartheta_3-2\vartheta_4-3\vartheta_5, \quad \vartheta_2=\zeta_3\eta_4-2\vartheta_3-2\vartheta_4-3\vartheta_5.$$

Hierbei bedeutet $\bar{\zeta}_1$ den zu ζ_1 konjugiert komplexen Charakter. Dem Charakter ϑ_1 entspricht die durch die Substitutionen (104.) erzeugte Darstellung der Gruppe $\mathfrak{C}_7$.

§ 49. Zu jedem einfachen Charakter χ von $\mathfrak{C}_\nu(\nu=6,7)$ gehört eine mit der Gruppe $\mathfrak{A}_\nu$ isomorphe irreduzible Kollineationsgruppe des Grades $\chi(E)$, die mit $\mathfrak{K}(\chi)$ bezeichnet werden möge. Ist $\chi(K)=k\chi(E)$ und gehört die Einheitswurzel k zum Exponenten m, so läßt sich $\mathfrak{K}(\chi)$ in $m\frac{\nu!}{2}$, aber nicht in weniger als $m\frac{\nu!}{2}$ homogenen linearen Substitutionen schreiben. Es soll nun untersucht werden, welche unter den Gruppen $\mathfrak{K}(\chi)$ als wesentlich voneinander verschieden anzusehen sind, wenn man zwei konjugiert komplexe Gruppen und ferner zwei adjungierte Gruppen nicht voneinander unterscheidet (vgl. Einleitung).

Dem äußeren Automorphismus A der Gruppe $\mathfrak{A}_\nu$, der dadurch entsteht, daß man in den Zykeln der Permutationen von $\mathfrak{A}_\nu$ die Ziffern 1 und 2 vertauscht, entspricht, wie man leicht erkennt, ein Automorphismus $\Gamma=\binom{R}{R^*}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_\nu$, der dadurch charakterisiert ist, daß

$$K^*=K^{-1},\ C_1^*=K^3C_1^2,\ C_a^*=K^3C_a \qquad (a>1)$$

wird. Ferner führt Γ bei der Gruppe $\mathfrak{S}_6$ die Klassen konjugierter Elemente (D') und (F') in (K^3D') und (F'^7) über, ebenso bei der Gruppe $\mathfrak{S}_7$ die Klassen (D') und (H') in (K^3D') und (H'^{-1}). Dagegen bleiben für $\nu=6$ die Klassen

$$(E),\ (A'),\ (B'),\ (C')$$

und für $\nu=7$ die Klassen

$$(E),\ (A'),\ (B'),\ (C'),\ (F'),\ (G')$$

ungeändert.

Ist nun $\chi(R)$ ein einfacher Charakter von $\mathfrak{S}_\nu$, so bilden auch die Zahlen

$$\chi^*(R)=\chi(R^*)$$

einen einfachen Charakter von $\mathfrak{S}_\nu$. Bezeichnet man noch die zu χ und χ^* konjugiert komplexen Charaktere mit $\overline{\chi}$ und χ', so wird, da $\chi^*(K)=\chi(K^{-1})$ und $\chi(K)$ konjugiert komplexe Zahlen sind,

$$\chi^*(K)=\overline{\chi}(K),\ \chi'(K)=\chi(K),$$

so daß also für χ und χ' die Einheitswurzel k denselben Wert erhält. Ferner wird für die Gruppe $\mathfrak{S}_6$ insbesondere

$$\chi^*(D')=\chi'(D')=k^3\chi(D'),\ \chi^*(F')=\chi'(F')=\chi(F'^7)$$

und für die Gruppe $\mathfrak{S}_7$

$$\chi^*(D')=\chi'(D')=k^3\chi(D'),\ \chi^*(H')=\chi'(H'^{-1})=\chi(H'^{-1}).$$

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Kollineationsgruppen $\mathfrak{K}(\chi)$, so können wir sagen: *die zu* $\mathfrak{K}(\chi)$ *adjungierte Gruppe ist* $\mathfrak{K}(\chi^*)$, *die zu* $\mathfrak{K}(\chi)$ *und* $\mathfrak{K}(\chi^*)$ *konjugiert komplexen Gruppen sind* $\mathfrak{K}(\overline{\chi})$ *und* $\mathfrak{K}(\chi')$. Wir bezeichnen $\mathfrak{K}(\chi')$ als die zu $\mathfrak{K}(\chi)$ *koadjungierte* Gruppe. Bezüglich der in unseren Tabellen angegebenen Charaktere der beiden Gruppen $\mathfrak{S}_\nu$ ergibt sich insbesondere folgendes: Für $\nu=6$ sind

$$\mathfrak{K}(\xi_3),\ \mathfrak{K}(\xi_4);\ \mathfrak{K}(\eta_3),\ \mathfrak{K}(\eta_4);\ \mathfrak{K}(\eta_5),\ \mathfrak{K}(\eta_6)$$

adjungierte und

$$\mathfrak{K}(\zeta_1),\ \mathfrak{K}(\zeta_2);\ \mathfrak{K}(\vartheta_1),\ \mathfrak{K}(\vartheta_2);\ \mathfrak{K}(\vartheta_3),\ \mathfrak{K}(\vartheta_4)$$

koadjungierte Gruppen. Ebenso sind für $\nu=7$

$$\mathfrak{K}(\xi_2),\ \mathfrak{K}(\xi_3);\ \mathfrak{K}(\eta_1),\ \mathfrak{K}(\eta_2);\ \mathfrak{K}(\eta_3),\ \mathfrak{K}(\eta_4)$$

adjungierte und

$$\mathfrak{K}(\vartheta_1),\ \mathfrak{K}(\vartheta_2)$$

koadjungierte Gruppen.

Bemerkenswert ist, daß die zu den algebraisch konjugierten Charakteren ζ_6 und ζ_7, bzw. ϑ_3 und ϑ_4 von $\mathfrak{C}_7$ gehörenden Kollineationsgruppen $\mathfrak{K}(\zeta_6)$ und $\mathfrak{K}(\zeta_7)$, bzw. $\mathfrak{K}(\vartheta_3)$ und $\mathfrak{K}(\vartheta_4)$ weder als konjugiert komplexe, noch als adjungierte oder koadjungierte Gruppen erscheinen, also in dem von uns festgesetzten Sinn als wesentlich voneinander verschieden zu betrachten sind. Diese Gruppen lassen sich aber jedenfalls als Gruppen mit konjugiert algebraischen Koeffizienten schreiben.

Bei der Gruppe $\mathfrak{A}_6$ hat man noch den Automorphismus zu berücksichtigen, der dem Zyklus (123) die Permutation (123)(456) zuordnet. Durch diesen Automorphismus werden, wie aus der Tabelle der Charaktere von $\mathfrak{C}_6$ leicht geschlossen werden kann, die Gruppen $\mathfrak{K}(\xi_1)$ und $\mathfrak{K}(\eta_1)$ in die Gruppen $\mathfrak{K}(\xi_2)$ und $\mathfrak{K}(\eta_2)$ übergeführt. Die Gruppen $\mathfrak{K}(\xi_1)$ und $\mathfrak{K}(\xi_2)$, bzw. $\mathfrak{K}(\eta_1)$ und $\mathfrak{K}(\eta_2)$ können daher so geschrieben werden, daß sie dieselben Substitutionen enthalten, und werden ebenfalls als nicht voneinander verschieden angesehen (vgl. § 42).

Wir gelangen zu folgendem Schlußresultat:

Jede mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 6, 7)$ *isomorphe Kollineationsgruppe* $\mathfrak{K}$ *läßt sich als Gruppe von* $m\frac{\nu!}{2}$ *homogenen linearen Substitutionen schreiben, wo* m *eine der Zahlen* 1, 2, 3, 6 *ist. Unter den irreduziblen Gruppen* $\mathfrak{K}$ *sind für* $\nu = 6$ *nur* 13 *und für* $\nu = 7$ *nur* 23 *wesentlich voneinander verschieden. Die Grade dieser Kollineationsgruppen sind in den folgenden Tabellen enthalten:*

Gruppe $\mathfrak{A}_6$

$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=6$
5, 8, 9, 10	4, 8, 10	3, 6, 9, 15	6, 12

Gruppe $\mathfrak{A}_7$

$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=6$
6, 10, 14, 14, 15, 21, 35	4, 14, 20, 20, 36	6, 15, 15, 21, 21, 24, 24	6, 24, 24, 36 .

§ 50. Vergleicht man die vorstehenden Tabellen mit den in § 42 und § 43 angegebenen Tabellen der Zahlen $f_{\nu_1,\nu_2,\ldots}$ und $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}$ und berück-

sichtigt man die Resultate, die wir in § 44 über das Größenverhältnis dieser Zahlen gewonnen haben, so erhält man den Satz:

*Man bezeichne eine mit der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorphe Kollineationsgruppe mit $\mathfrak{S}_n^{(h)}$ oder $\mathfrak{S}_n^{(g)}$, je nachdem sie sich in $n!$ homogenen linearen Substitutionen schreiben läßt oder nicht. Unter $s_n^{(h)}$ und $s_n^{(g)}$ verstehe man die kleinsten unter den Graden der Gruppen $\mathfrak{S}_n^{(h)}$, bzw. $\mathfrak{S}_n^{(g)}$. Die entsprechenden Zahlen für die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ bezeichne man mit $a_n^{(h)}$ und $a_n^{(g)}$. Dann ist für $n \geqq 4$**)

$$s_n^{(h)} = n-1, \quad s_n^{(g)} = 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$a_n^{(h)} = n-1, \quad a_n^{(g)} = 2^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}.$$

Eine Ausnahme bilden bei der alternierenden Gruppe die beiden Fälle $n=5$ und $n=6$; es ist nämlich

$$a_5^{(h)} = 3, \quad a_6^{(g)} = 3.$$

Hierin ist zugleich der zuerst von Herrn *A. Wiman***) bewiesene Satz enthalten, der besagt, daß für $n>7$ weder die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ noch die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ einer Kollineationsgruppe isomorph sein kann, deren Grad kleiner als $n-1$ ist.

---

*) Die Zahlen $s_n^{(g)}$ und $a_n^{(g)}$ haben nur für $n \geqq 4$ einen Sinn. Für $n<4$ kommt noch hinzu

$$s_2^{(h)} = a_2^{(h)} = 1, \quad s_3^{(h)} = 2, \quad a_3^{(h)} = 1.$$

**) Math. Annalen, Bd. 52, S. 243.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Einleitung		155
Abschnitt I.	Die Darstellungsgruppen der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$	160
„ II.	Über die Einteilung der Elemente der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ in Klassen konjugierter Elemente	171
„ III.	Über die Zuordnung der Elemente der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n$	178
„ IV.	Allgemeine Eigenschaften der Charaktere der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$	183
„ V.	Über die zu den Charakteren der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$ gehörenden Kollineationsgruppen	193
„ VI.	Die Hauptdarstellung zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$	197
„ VII.	Über die Gruppen $\mathfrak{T}_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$	206
„ VIII.	Einführung des Begriffs der Charakteristik	214
„ IX.	Über die Funktionen $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m}$	224
„ X.	Bestimmung der einfachen Charaktere der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{B}_n$	231
„ XI.	Die alternierenden Gruppen mit sechs und sieben Vertauschungsziffern	240

Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.

Zweiter Teil:

Die zentralen Uniformisierungsprobleme.

Von Herrn *Paul Koebe* in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

		Seite
	Einleitung	251
§ 1.	Formulierung der zentralen Uniformisierungsprobleme A, B, C, D, E	253
§ 2.	Die Natur der Überlagerungsflächen $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$ und der Unitätssatz	258
§ 3.	Konstruktion der Überlagerungsflächen $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$	271
§ 4.	Existenz der gesuchten Uniformisierungstranszendenten. Zugeordnete Gruppe und unabhängiges Erzeugendensystem derselben	276
§ 5.	Die Alternative des euklidischen und nichteuklidischen Falles	280
§ 6.	Der Fall der algebraischen Kurven: Konstruktion der Überlagerungsflächen: die Alternative des euklidischen und nichteuklidischen Falles	284
§ 7.	Beziehung der zentralen Uniformisierungsprobleme zu den nichteuklidischen diskontinuierlichen Bewegungsgruppen	289

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung ist die Fortsetzung der in Bd. 138 dieses Journals (1910) erschienenen Abhandlung des Verfassers „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Erster Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip", eine Abhandlung, welche im folgenden als „*erster Teil*" zitiert werden soll.

In der vorliegenden Abhandlung werden auf Grund des im „*ersten Teil*" begründeten *allgemeinen Uniformisierungsprinzips* speziell diejenigen zu einer beliebigen analytischen Kurve (x, y) gehörenden Uniformisierungstranszendenten $t(x, y)$ bestimmt, bei welchen, allgemein zu reden, die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ simultan eindeutige automorphe Funktionen mit *einem Grenzkreise oder Symmetriekreise* werden. Wird der Kreis als Achse

des Reellen normiert, so werden die erwähnten automorphen Funktionen Funktionen, welche bei einer *Gruppe reeller linearer Substitutionen* simultan ungeändert bleiben*). Es handelt sich wesentlich um die genauere Begründung der von mir in meiner ersten Mitteilung „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" (Nachr. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1907) aufgestellten Uniformisierungstheoreme, welche sich zum Teil auf beliebige *reelle oder komplexe analytische Kurven*, zum Teil nur auf beliebige *reelle analytische Kurven* beziehen. Diese Theoreme stellen die naturgemäße und ihrem Umfange nach in sachgemäßer Vollständigkeit gegebene Ausdehnung der von mir in der Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." (Math. Ann. Bd. 67, 1909) begründeten Uniformisierungstheoreme auf beliebige analytische Kurven dar, namentlich des von Herrn *Klein* (Math. Ann. Bd. 20) und Herrn *Poincaré* (Acta math. Bd. 1 und 4) entdeckten fundamentalen *Grenzkreistheorems*. War das letztgenannte Theorem insbesondere bei der Aufstellung der erwähnten auf beliebige reelle oder komplexe analytische Kurven sich beziehenden Uniformisierungsprobleme vorbildlich, so wurzeln die auf reelle analytische Kurven sich beziehenden in einem von Herrn *Klein* für symmetrische algebraische *Riemann*sche Flächen gefundenen, auf beliebige symmetrische *Riemann*sche Flächen jedoch übertragbaren Satze, durch welchen die von Herrn *Klein* gegebene Unterscheidung der „*orthosymmetrischen*" und „*diasymmetrischen*" *Riemann*schen Flächen begründet wird. Genauer wird der Kreis der in vorliegender Abhandlung behandelten Uniformisierungsprobleme durch die Bemerkung charakterisiert, daß *diese Probleme in ihrer Gesamtheit alle diejenigen Uniformisierungsprobleme darstellen, bei welchen die zugehörenden eigentlich diskontinuierlichen linearen Substitutionsgruppen als diskontinuierliche Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie (Riemannsche, Euklidische, im allgemeinen Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie) mit endlich oder unendlich vielen Gruppenerzeugenden interpretiert werden können. Auch gibt umgekehrt die Uniformisierung ein Mittel, alle eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der nichteuklidischen Geometrie zu bestimmen.*

---

*) Herr *Poincaré* bezeichnet diese Funktionen in seiner Abhandlung „Sur l'uniformisation des fonctions analytiques" (Acta math. Bd. 31, 1907) als „*fonctions fuchsoïdes*" in Analogie zu den von ihm früher (1882) als „fonctions fuchsiennes" bezeichneten Funktionen.

Die Aufmerksamkeit der Forscher zum ersten Male in Richtung des Problems der Uniformisierung *beliebiger* analytischer Kurven gelenkt zu haben, insbesondere im Sinne der Verallgemeinerung des erwähnten „*Grenzkreistheorems*", ist das Verdienst von Herrn *Poincaré*, welcher in seiner Abhandlung „Sur un théorème de la théorie générale des fonctions" (Bull. de la Soc. math. de France, t. XI, 1883), das bezeichnete Problem ursprünglich in Angriff nahm. Mit der direkten Anknüpfung an diese *Poincaré*sche Abhandlung begann die neue Entwicklung auf dem Gebiete der Uniformisierungstheorie, nachdem Herr *Hilbert* in seinem Pariser Vortrage (1900) von neuem auf die fundamentale *Poincaré*sche Fragestellung hingewiesen hatte in dem Problem 22: „Uniformisierung analytischer Beziehungen durch automorphe Funktionen".

§ 1. *Formulierung der zentralen Uniformisierungsprobleme.*

Es sei (x, y) irgendeine reelle*) oder komplexe analytische Kurve, F die zu der analytischen Funktion $y(x)$ gehörende *Riemann*sche Fläche, von welcher wir nur die inneren Punkte als zur Fläche gehörig betrachten wollen, d. s. diejenigen Punkte der Fläche F, an welchen die Funktion $y(x)$ den Charakter einer rationalen oder algebraischen Funktion von x besitzt. Jedem Zweige der analytischen Funktion $y(x)$ entspricht eindeutig ein ganz bestimmtes Blatt der Fläche F. Wir fassen zugleich mit der Funktion $y(x)$ alle diejenigen analytischen Funktionen von x auf, welche als Funktionen des Ortes auf der Fläche F überall definiert sind und durchweg den Charakter einer rationalen Funktion von x, y haben. Letztere Forderung ist gleichbedeutend mit der anderen Forderung, daß die betreffenden Funktionen an jedem Punkte der Fläche F den Charakter einer algebraischen Funktion von x haben und außerdem relativ zu F unverzweigt sind. Dabei wird eine solche Funktion, die wir etwa mit $\tau(x, y)$ bezeichnen wollen, im allgemeinen relativ zu F unendlich-vieldeutig sein. Unsere Forderung gilt dann für alle relativen Zweige der Funktion $\tau(x, y)$. Zur Klasse der Funktionen $\tau(x, y)$ gehören offenbar die Größen x und y selbst.

Wir stellen nun als erstes Problem das folgende.

Problem A. *Es soll eine Funktion $t(x,y)$ von folgenden Eigenschaften bestimmt werden: Die Funktion $t(x,y)$ soll der Klasse der Funktionen $\tau(x,y)$*

*) Eine analytische Kurve (x, y) heißt *reell*, wenn dieselbe mindestens *einen* reellen Zug besitzt.

angehören, und es soll jede Funktion $\tau(x,y)$ eine eindeutige Funktion von t sein, insbesondere sollen also auch x und y eindeutige Funktionen von t sein).*

Die Größe t ist also in dem in § 1 des ersten Teiles definierten Sinne eine zur Kurve (x,y) gehörende, relativ unverzweigte uniformisierende Variable.

Indem man τ als Funktion von t betrachtet, hat man offenbar eine Willkür in der Wahl der relativen Zweige $\tau(x,y)$ und $t(x,y)$, welche man sich ursprünglich bei der Bildung der Funktion $\tau(t)$ zugeordnet denkt. Unsere in A gestellte Bedingung der Eindeutigkeit der Funktion $\tau(t)$ in dem Gebiete T soll erfüllt sein, wie man auch die Wahl der zugeordneten Zweige trifft. Hierin liegt, beiläufig bemerkt, daß die Funktion $t(x,y)$ selbst relativ regulär sein soll, da nun auch je zwei Zweige dieser Funktion den gestellten Bedingungen gemäß eindeutige Funktionen voneinander sein müssen. (Vgl. die Begriffsbestimmung in § 1 des ersten Teiles). Die entsprechenden Bemerkungen gelten für die Probleme B, C, D, E. (Vgl. zu den vorstehenden Bemerkungen S. 277 unten.)

Um zum zweiten Problem zu gelangen, denken wir uns auf der Fläche F unendlich viele einzelne (*singuläre*) Punkte markiert, welche sich im Innern der Fläche F nicht häufen und folglich eine abzählbare Menge M bilden. Von dieser Menge können somit stets nur endlich viele Punkte einem einschließlich seiner Begrenzung inneren Teilbezirke der Fläche F angehören. Wir bezeichnen jetzt als Funktionen $\tau'(x,y)$ alle diejenigen Funktionen auf der Fläche F, welche, abgesehen von den Punkten der Menge M, an allen Punkten der Fläche F den Charakter rationaler Funktionen von x und y haben, an den Punkten der Menge M sich jedoch verzweigen können und zwar so, daß sie sich an jedem dieser Punkte nach einer vorgeschriebenen endlichen oder unendlich großen Anzahl von Um-

*) Die Eindeutigkeit der Funktion $\tau(t)$ wird dabei nur in dem Sinne gefordert, daß $\tau(t)$ bei Beschränkung der Variablen t auf den Wertebereich T dieser Variablen, wie derselbe in § 1 des ersten Teiles definiert ist, eindeutig sein soll. Darüber hinaus kann die Funktion $\tau(t)$ unter Umständen vieldeutig werden. Andererseits ist hervorzuheben, daß z. B. für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ der *vollständige simultane Existenzbereich* durch T dargestellt wird, so daß über T hinaus keine simultane analytische Fortsetzung möglich ist. Entsprechende Bemerkungen gelten für die Größen t', t_s, t'_s, t'_s (Problem B, C, D, E).

läufen reproduzieren*), wobei nicht ausgeschlossen ist, daß sie sich auch schon nach weniger Umläufen, deren Anzahl dann aber stets ein genauer Teil der vorgeschriebenen Zahl ist, reproduzieren. Die dem einzelnen singulären Punkte zugeordnete ganze Zahl heiße die diesem Punkte zugeordnete *Verzweigungszahl.* Die τ'-Klasse ist also erst nach Angabe der Punktmenge M und der Verzweigungszahlen bestimmt. Wir stellen nun folgendes weitere Problem.

Problem B. *Es soll eine Funktion $t'(x,y)$ von folgenden Eigenschaften bestimmt werden: Die Funktion $t'(x,y)$ soll der Klasse der Funktionen $\tau'(x,y)$ angehören. Außerdem soll jede Funktion $\tau'(x,y)$ eine eindeutige Funktion von t' sein; insbesondere sollen also auch x und y selbst eindeutige Funktionen der Größe t' sein.*

Um zu den weiteren zu erörternden Problemen zu gelangen, legen wir jetzt spezieller eine *reelle* analytische Kurve (x,y) zugrunde. Eine solche Kurve wird eine bestimmte endliche oder unendlich große Anzahl reeller Züge haben, die teils geschlossen, teils ungeschlossen sind. Bezeichnet F_s**) die *Riemann*sche Fläche der Funktion $y(x)$, so wird dieselbe offenbar eine Symmetrie in bezug auf die Achse des Reellen besitzen, wobei je zwei Punkte der Fläche F_s, denen konjugiert imaginäre Kurvenpunkte entsprechen, sich gegenseitig zugeordnet sind. Zwei Punkte des Gebildes (x,y) nennen wir dabei konjugiert, wenn sowohl die x-Koordinaten als auch die y-Koordinaten konjugiert imaginäre Werte haben. Den reellen Zügen der Kurve (x,y) entsprechen auf der Fläche F_s bestimmte, teils geschlossene, teils ungeschlossene Linien, die wir als die *Symmetrielinien* der Fläche F_s bezeichnen. Ist insbesondere die Symmetrielinie ungeschlossen, so nähert sie sich, nach welcher Seite hin man sie auch verfolgt, der Grenze der Fläche F_s***).

---

*) Der Ausdruck „sich nach unendlich vielen Umläufen reproduzieren“ soll nicht mehr besagen, als daß die betreffende Funktion sich überhaupt in dem betreffenden Punkte verzweigen darf, wobei es gleichgültig ist, ob von endlicher oder unendlich hoher Ordnung.

**) Der Index s soll auf die Symmetrie der Fläche F hinweisen.

***) Der Ausdruck „eine Linie auf einer beliebigen, allgemein zu reden, unendlich-vielblättrigen *Riemann*schen Fläche F nähert sich der Grenze der Fläche F“ soll bedeuten: wenn man F als Grenze von Näherungsflächen $F = \lim_{n=\infty} F_n$ auffaßt, wie in § 2 des ersten Teiles, so tritt die Linie nach und nach aus jedem Näherungsbereiche mit noch so hohem Index heraus, ohne je wieder in denselben zurückzukehren.

Wir betrachten nun die Klasse aller derjenigen Funktionen $\tau_s(x, y)$, welche erstlich die Eigenschaft haben, der S. 253 für beliebige Flächen F, also auch für F_s definierten τ-Klasse anzugehören, und zweitens die Eigenschaft an den reellen Punkten der Kurve (x, y), d. i. also auf den Symmetrielinien der Fläche F_s in allen ihren relativen Zweigen nur *reelle* Werte anzunehmen*). Wir stellen sodann folgendes Problem.

Problem C. *Es soll eine Funktion $\tau_s(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften bestimmt werden: Die Funktion $\tau_s(x, y)$ soll erstens der τ_s-Klasse angehören, und zweitens sollen alle Größen der τ_s-Klasse eindeutige Funktionen der Größe t_s werden, insbesondere also auch x und y selbst.*

Weiter wollen wir die Klasse aller derjenigen Funktionen $\tau'_s(x, y)$ betrachten, die erstens einer bestimmten τ'-Klasse (s. die Definition S. 254) angehören, und zweitens auf den reellen Zügen der Kurve (x, y) in allen relativen Zweigen nur reelle Werte annehmen.

Damit die zweite Bedingung *(Realitätsbedingung)* mit der ersten in Einklang ist, hat man behufs Angabe der τ'-Klasse die Menge M der singulären Punkte und die zugeordneten *Verzweigungszahlen paarweise symmetrisch* zu geben, wobei außerdem kein Punkt der Menge M auf einer Symmetrielinie unserer Fläche F_s gegeben werden darf. Wir stellen nun folgendes Problem.

Problem D. *Es soll eine Funktion $t'_s(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften bestimmt werden: Die Funktion $t'_s(x, y)$ soll der τ'_s-Klasse angehören, und es sollen alle Funktionen der τ'_s-Klasse, also auch die Größen x und y selbst eindeutige Funktionen von t'_s werden.*

Wir gehen noch einen Schritt weiter, indem wir uns denken, daß wir die Symmetrielinien der Fläche F_s bzw. die reellen Kurvenzüge der Kurve (x, y) nicht vollständig für die Realitätsbedingung der zu betrachtenden Funktionenklasse heranziehen, sondern nur Teile derselben markieren, die wir als *Realitätszüge***) bezeichnen. Dabei kann eine einzelne vollständige Symmetrielinie nun entweder ganz außer Betracht gelassen

*) Die Fläche F_s kann an sich noch andere Symmetrielinien besitzen außer den von uns betrachteten, welche den reellen Kurvenpunkten entsprechen. Für uns kommen jedoch hier nur diejenigen in Betracht, welche auf Grund der gewählten reellen Darstellung der Kurve (x, y) bevorzugt sind.

**) Vgl. die Definition der *Realitätszüge* in meiner Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." (Math. Ann. Bd. 67, S. 176 und 189.)

werden, oder aber es sind auf einer solchen endlich oder unendlich viele Stücke als *Realitätszüge* markiert. Diese Stücke sollen jedoch so gewählt sein, daß an keinem inneren Punkte einer einzelnen Symmetrielinie der Fläche F_s eine Häufung der Realitätszüge entsteht; auf einer geschlossenen Symmetrielinie können also nur endlich viele voneinander verschiedene Stücke derselben als Realitätszüge markiert werden. Wir bezeichnen die Klasse aller derjenigen Funktionen, welche erstens bei passender Bestimmung der Menge M der singulären Punkte alle einer und derselben bestimmten, sogleich näher zu charakterisierenden τ'-Klasse angehören und zweitens auf den markierten Realitätszügen in allen ihren relativen Zweigen nur reelle Werte annehmen, als eine τ_s''-Klasse, indem wir eine einzelne derartige Funktion mit $\tau_s''(x, y)$ bezeichnen.

Die Bestimmungsstücke der τ'-Klasse, in welcher alle Funktionen der τ_s''-Klasse enthalten sein sollen, hat man, um mit der Realitätsbedingung in Einklang zu bleiben, folgenden Bedingungen entsprechend zu wählen. Erstens darf kein Punkt der Menge M der singulären Punkte auf einem Realitätszuge liegen, es sei denn, daß dieser Punkt ein im Innern der Fläche F_s liegender Endpunkt eines Realitätszuges ist. An einem solchen Endpunkt wird jede Funktion unserer τ_s''-Klasse wegen der gestellten Realitätsbedingung sich spätestens nach *zwei* vollständigen Umläufen um diesen Punkt reproduzieren. Man wird demgemäß einen solchen Endpunkt stets als einen Punkt der Menge M zu betrachten haben, wobei die diesem Punkte zugeordnete Verzweigungszahl gleich 2 ist. Im übrigen sind die Punkte der Menge M mit den zugeordneten Verzweigungszahlen auf F_s paarweise symmetrisch zu geben, wobei jedoch jetzt auch ein Punkt sich selbst entsprechen darf, indem derselbe auf einem Stücke einer Symmetrielinie liegt, welches nicht als Realitätszug markiert ist. Die einfachste τ_s''-Klasse wird erhalten, wenn außer den innerhalb F_s liegenden Endpunkten der Realitätszüge keine weiteren Punkte als relative Verzweigungspunkte markiert werden.

Wir stellen jetzt folgendes Problem.

Problem E. *Es soll eine Funktion $t_s''(x, y)$ bestimmt werden, welche erstens einer gegebenen τ_s''-Klasse angehört und zweitens so beschaffen ist, daß alle Funktionen dieser τ_s''-Klasse, insbesondere also auch die Größen x und y eindeutige Funktionen der Größe t_s'' werden.*

§ 2. *Die Natur der Überlagerungsflächen $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$ und der Unitätssatz.*

a) Analyse des Problems A*). Der Unitätssatz.

Gemäß der in § 1 des ersten Teiles entwickelten Auffassung zerfällt jedes der im vorhergehenden Paragraphen gestellten Uniformisierungsprobleme in ein *Analysis-situs-Problem* und ein *Abbildungsproblem.*

Es ist jetzt vor allem der Nachweis zu liefern, daß die zu der gesuchten Funktion $t(x, y)$ (Problem A) sowie die zu der gesuchten Funktion $t'(x, y)$ (Problem B) gehörende Überlagerungsfläche Φ bzw. Φ' *einfach zusammenhängend* ist, daß ferner die zu der Funktion $t_s(x, y)$ (Problem C) sowie die zu der Funktion $t_s'(x, y)$ (Problem D), ferner die zu $t_s''(x, y)$ (Problem E) gehörende Überlagerungsfläche Φ_s bzw. Φ_s', Φ_s'' in *zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften* zerfällt, wenn man sich jede der letzteren Flächen in allen ihren relativen Blättern (relativ zur Fläche F_s) längs allen Realitätszügen**) aufgeschnitten denkt.

Gehen wir zu dem Zwecke aus von der Annahme, daß es eine Größe $t(x, y)$ von den verlangten Eigenschaften gibt, so wird vermittelst der Funktion $t(x, y)$ die Fläche Φ umkehrbar eindeutig und konform auf ein schlichtes Gebiet T, nämlich das *Wertegebiet* der Variablen t abgebildet. Wäre nun das Gebiet T nicht einfach zusammenhängend, so könnten wir in der t-Ebene zwei verschiedene Punkte a und b wählen, von welchen keiner dem Innern des Bereichs T angehört, wohl aber auf der Grenze desselben liegen kann. Die Funktion $\sqrt{\frac{t-a}{t-b}}$ kann dann als Funktion des Ortes auf der Fläche Φ, mithin auf der Fläche F aufgefaßt werden. Als solche gehört sie jedenfalls der τ-Klasse an und müßte auf Grund einer der Größe t auferlegten Bedingung eine eindeutige Funktion der Größe t in dem Gebiete T sein. Das letztere ist jedoch nicht der Fall, sobald man a und b so wählt, daß beide von verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs T umschlossen werden oder auf denselben liegen.

---

*) Wir setzen im folgenden (§ 2—5) zunächst voraus, daß die zu uniformisierende Funktion $y(x)$ nicht algebraisch ist, so daß also die *Riemann*sche Fläche F nicht geschlossen ist. In § 6 widmen wir dem algebraischen Falle eine besondere Untersuchung.

**) Im Falle der Probleme C und D ist das *vollständige* System der Symmetrielinien bzw. reellen Züge der Kurve (x, y) als System der Realitätszüge zu betrachten.

Nachdem festgestellt ist, daß die Fläche Φ sowie der Bereich T*) einfach zusammenhängend sein müssen, können wir nun auch erkennen, daß die Funktion $t(x, y)$ durch ihre Eigenschaften bis auf eine Normierung vollständig bestimmt ist. Offenbar kann man, wenn eine Funktion $t(x, y)$ von den verlangten Eigenschaften gefunden ist, von dieser Funktion dadurch zu einer anderen Funktion mit denselben Eigenschaften übergehen, daß man eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche T, d. i. ihres Innern, auf einen ebenfalls schlichten Bereich $\bar{T}$ macht. Ist $\bar{t}(t)$ die abbildende Funktion, so ist $\bar{t}$, betrachtet als Funktion von (x, y), offenbar ebenfalls eine Funktion mit den für t verlangten Eigenschaften. Um die gesuchte Funktion $t(x, y)$ zu einer bestimmten zu machen, müssen wir noch die Form des Bereichs T normieren. Nun ist es auf Grund unseres allgemeinen Abbildungstheorems**), welches wir im ersten Teile bewiesen haben, insbesondere möglich, den schlichten Bereich T umkehrbar eindeutig und konform auf einen von einem Schlitze bzw. einem einzelnen Punkte begrenzten schlichten Bereich abzubilden, von welch letzterem Bereiche wir durch elementare Operationen zur Fläche des Einheitskreises bzw. der ganzen Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes übergehen können. Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

a. Der Bereich T wird von der ganzen Ebene exklusive eines und nur eines Punktes der Ebene gebildet. In diesem Falle können wir uns den ausgeschlossenen Punkt durch lineare Transformation zum unendlich fernen Punkte gemacht denken. Dann ist der Bereich normiert.

b. Der Bereich T wird von einer zusammenhängenden Linie begrenzt. In diesem Falle findet die Normierung auf eine endliche Kreisfläche, etwa auf den Einheitskreis oder auf die obere Halbebene (Halbebene oberhalb der Achse des Reellen) statt***).

Indem wir uns vorstellen, daß wir durch stereographische Projektion zur Kugel übergehen, können wir die genannten drei Fälle zweckmäßig bezeichnen als

---

*) Φ und T sind umkehrbar eindeutig konform aufeinander abgebildete Flächen.

**) Vgl. auch die den Fall des einfach zusammenhängenden Bereichs besonders betreffende Untersuchung in dem Abschnitt A meiner Note „Über die *Hilbert*sche Uniformisierungsmethode“. Gött. Nachr. 1910.

***) Da die *Riemann*sche Fläche F hier ungeschlossen vorausgesetzt wird, kann offenbar auch der Bereich T nicht geschlossen sein.

a. ***Fall der punktierten Kugel,***

b. ***Fall der Kugelkalotte.***

Mit Rücksicht auf die sich ergebenden Beziehungen zur *euklidischen* bzw. *nichteuklidischen* Geometrie können diese Fälle bezeichnet werden als

a. *euklidischer Fall,*

b. *nichteuklidischer Fall.*

Einige Bemerkungen mögen noch erläutern, warum in den genannten Fällen a und b die Normierung in der angegebenen Weise stattzufinden hat. Im Falle a kann eine Funktion $\bar{t}(t)$, welche eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Innern des Bereichs T auf einen ebenfalls schlichten Bereich $\bar{T}$ leistet, nur eine lineare Funktion von t sein. Denn, wenn etwa $\bar{t}_0$ ein innerer Punkt des Bereichs $\bar{T}$ ist, so wird die Funktion $\frac{1}{\bar{t}(t)-\bar{t}_0}$ eine solche Funktion von t sein, welche nur an einem Punkte des Gebiets T unendlich wird, und zwar von der ersten Ordnung, und welche in der Umgebung des Grenzpunktes von T dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, so daß sie auf Grund eines bekannten Satzes auch in dem Grenzpunkte selbst sich regulär verhalten muß. Im Falle b handelt es sich nur darum, zu entscheiden, ob der Bereich T in den Bereich einer endlichen Kreisfläche oder der ganzen Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes verwandelt werden kann. Das letztere ist darum auszuschließen, weil alsdann die inverse Funktion $t(\bar{t})$ zufolge der unmittelbar vorher im Falle a angestellten Überlegung sich notwendig auf eine lineare Funktion reduzieren müßte. Dann würde aber auch der Bereich T entgegen der Annahme nur von einem einzigen Punkte begrenzt sein können.

Der Satz, daß man den allgemeinst denkbaren *schlichten* einfach zusammenhängenden Bereich, dessen Begrenzung nicht nur von einem Punkte gebildet wird, umkehrbar eindeutig und konform bei Berücksichtigung lediglich der inneren Punkte des Bereiches auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann, ist zuerst von Herrn *Osgood**) bewiesen worden mit Benutzung des *Harnack*schen Satzes über positive Potentiale und einer von Herrn *Poincaré***)

*) *Osgood*: „On the existence of the Greens function for the most general simply connected plane region." Trans. of the Am. Math. Soc., 1900.

**) Ich verweise auf das Referat in § 14 des ersten Teiles.

angegebenen, die elliptische Modulfunktion zu Hilfe nehmenden Majorante. Ich selbst habe, abgesehen von dem im ersten Teile entwickelten allgemeinen Beweise, den Fall des allgemeinsten *auch nicht schlichten* einfach zusammenhängenden Bereichs in den Abhandlungen „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." (Math. Ann. Bd. 67, 1909) sowie in meiner ersten und zweiten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (Gött. Nachr. 1907) nach verschiedenen Methoden behandelt*). Zu den Entwicklungen S. 207 bis 213 meiner erwähnten Annalenarbeit hat man für den Fall des allgemeinsten *schlichten* einfach zusammenhängenden Bereichs nur nötig, die Existenz einer oberen Schranke für die dort betrachteten Größen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ darzutun, was mit der Bestimmung einer Majorante gleichbedeutend ist. Eine solche Majorante läßt sich in völlig elementarer Weise angeben. Läßt nämlich der gegebene einfach zusammenhängende Bereich ein zweidimensionales Gebiet der Ebene unbedeckt, so können wir ihn durch lineare Transformation in einen Bereich verwandeln, welcher ganz innerhalb des Einheitskreises liegt, und erhalten in Gestalt der Funktion $\log \frac{1}{r}$ (das ist die *Green*sche Funktion des Einheitskreises) unmittelbar eine Majorante. Trifft jedoch die erwähnte Voraussetzung nicht zu, so wählen wir irgend zwei Punkte a und b auf der Begrenzung des Bereichs und transformieren denselben mittels der Funktion $\sqrt{\frac{t-a}{t-b}}$**), welche in dem Bereiche unverzweigt ist und folglich, weil der Bereich einfach zusammenhängend ist, in diesem Bereiche auch eindeutig ist. Nach Ausführung der angegebenen Transformation läßt der nun erhaltene einfach zusammenhängende Bereich offenbar ein zweidimensionales Stück der Ebene unbedeckt**).

Nachdem mit der Größe t die in der obigen Fallunterscheidung angegebene Normierung ausgeführt ist, ist diese Größe gleichwohl noch nicht völlig bestimmt. Im euklidischen Falle kann an Stelle der Größe t jede ganze lineare Funktion derselben Größe treten. Im nichteuklidischen Falle kann an Stelle der Größe t jede lineare Funktion von t treten, welche das Innere des Einheitskreises bzw. die obere Halbebene in sich trans-

*) Ich verweise auf das Referat in § 14 des ersten Teiles.

**) Vgl. eine Fußnote S. 644 meiner zweiten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Gött. Nachr. 1907.)

formiert, d. i. bei Zugrundelegung der oberen Halbebene jede reelle lineare Funktion von t (lineare Funktion mit reellen Koeffizienten).

Es ist noch zu zeigen, daß durch die angegebenen Normierungsbedingungen die gesuchte Funktion $t(x, y)$ in der Tat bis auf eine lineare Substitution, welche den betreffenden Normalbereich in sich transformiert, vollständig bestimmt ist.

Zu dem Zwecke nehmen wir an, es gebe noch eine zweite Funktion $\bar{t}(x, y)$ von den verlangten Eigenschaften. Es sei T der normierte einfach zusammenhängende Bereich der Variabeln t, $\bar{T}$ der normierte einfach zusammenhängende Bereich der Variabeln $\bar{t}$. Der Bereich T wird durch Vermittlung der Funktion $\bar{t}(t)$ auf den Bereich T abgebildet, und zwar besitzt weder die Funktion $\bar{t}(t)$ in T, noch die Funktion $t(\bar{t})$ in $\bar{T}$ einen Verzweigungspunkt. Die Abbildung der Bereiche T und $\bar{T}$ aufeinander ist daher, weil beide Bereiche einfach zusammenhängend sind, eine umkehrbar eindeutige Beziehung. Daraus folgt zunächst, daß die Normalbereiche T und $\bar{T}$ nicht verschieden sein können, d. h. es wird, je nachdem der eine der beiden Bereiche von der ganzen Ebene oder der Fläche des Einheitskreises gebildet wird, notwendig auch der andere von der ganzen Ebene bzw. der Fläche des Einheitskreises gebildet.

Demnach bleibt nur zu untersuchen, ob jede analytische Funktion, welche einen einfach zusammenhängenden Normalbereich in sich transformiert, eine lineare Funktion ist. Dieser Nachweis ist für den Fall der ganzen Ebene (exkl. des unendlich fernen Punktes) unmittelbar aus den Bemerkungen S. 260 oben zu entnehmen, also ist nur zu prüfen, ob jede analytische Funktion, welche das Innere*) des Einheitskreises umkehrbar eindeutig in sich transformiert, eine lineare Funktion ist. In der Tat gilt der Satz, daß jede derartige Funktion eine lineare Funktion ist. Derselbe ist zuerst von Herrn *Poincaré***) bewiesen worden.

Wesentlich anders als der *Poincaré*sche Beweis verläuft der folgende neue Beweis, welcher beiläufig bemerkt in hohem Grade verallgemeinerungsfähig ist, indem er den Grundgedanken eines viel komplizierteren, ganz allgemeinen Unitätsbeweises zeigt, welchen ich in der Abhandlung „Über die

*) Über das Verhalten der Abbildungsfunktion bei der Annäherung an die Peripherie des Einheitskreises wird dabei keine beschränkende Voraussetzung gemacht.

**) *Poincaré*, Acta math. Bd. 4, S. 231.

Uniformisierung der algebraischen Kurven. III." entwickele*). Man wird auf diesen Beweis geführt, wenn man zunächst an den Fall denkt, in welchem von der Abbildungsfunktion $\bar{t}(t)$ von vornherein bekannt ist, daß sich dieselbe auch auf der Peripherie des Einheitskreises regulär verhält. In diesem Falle kann nämlich die Funktion $\bar{t}(t)$ auf Grund des *Schwarz*schen Spiegelungsprinzips mittels Transformation durch reziproke Radien auch für das ganze Äußere des Einheitskreises inkl. des unendlich fernen Punktes erklärt werden. Die so analytisch fortgesetzte Funktion $\bar{t}(t)$ vermittelt demnach eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Vollebene (Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes) auf sich selbst. Als solche ist sie aber eine lineare Funktion, da sie überall den Charakter rationaler Funktionen besitzt und nur an einer Stelle und an dieser von der ersten Ordnung unendlich wird. Nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $\bar{t}(t)$ nur für das *Innere* des Einheitskreises erklärt ist, also unter vorläufigem Ausschluß der Peripherie, so können wir jedenfalls nach Analogie des Spiegelungsprinzips auch für das Äußere des Einheitskreises eine Funktion erklären, die wir ebenfalls mit $\bar{t}(t)$ bezeichnen wollen, von welcher jedoch noch nicht bekannt ist, ob sie die analytische Fortsetzung der inneren Funktion ist. Dieselbe vermittelt eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Äußeren auf sich selbst. Führt die innere Funktion den Nullpunkt in sich über, eine Annahme, die übrigens für den folgenden Beweis ganz unwesentlich ist, so führt die äußere Funktion den unendlich fernen Punkt in sich über. Wir konstruieren um den Nullpunkt als Mittelpunkt drei Kreise, einen mit dem Radius $1-\varepsilon$, einen mit dem Radius $\frac{1}{1-\varepsilon}$ und einen mit dem Radius $R>1$. Die beiden ersten Kreise sind also in bezug auf den Einheitskreis spiegelbildlich symmetrisch und mögen mit K und K' bezeichnet werden, während der letzte mit $\varkappa$ bezeichnet werde. Die positiv zu nehmende Größe ε denken wir uns sehr klein gewählt in der Absicht, dieselbe hernach zur Grenze $\varepsilon=0$ übergehen zu lassen.

Um zu beweisen, daß die Funktion $\bar{t}(t)$ eine lineare Funktion von t ist, hat man nur nötig darzutun, daß die innere Funktion $\bar{t}(t)$ sich auch

*) Math. Ann. 1911. Es handelt sich in dieser Abhandlung um den Unitätsbeweis im Falle des allgemeinsten von Herrn *Klein* (Math. Ann. Bd. XXI) aufgestellten Fundamentaltheorems.

auf der Peripherie des Einheitskreises regulär verhält, in welchem Falle dann die äußere Funktion $\bar{t}(t)$ tatsächlich die richtige analytische Fortsetzung der inneren Funktion $\bar{t}(t)$ bildet.

Es sei t_0 irgend ein bestimmt gewählter t-Wert, für welchen $|t_0|<1$ ist. Ist ε bereits hinreichend klein gewählt, so liegt t_0 innerhalb des Kreises K, und wir können auf den Kreis K die *Cauchy*sche Integralformel anwenden

$$\bar{t}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}dt\,.$$

In dem Gebiete zwischen K' und $\varkappa$ ist die Funktion $\frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}$ regulär erklärt. Wir haben daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K'} \frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa} \frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}dt=0,$$

wobei die letzterwähnten Kurvenintegrale in entgegengesetztem Sinne zu nehmen sind. Das Kurvenintegral über K' wählen wir im negativen Sinne, also entgegengesetzt dem Integral über K. Wir finden jetzt für $\bar{t}(t_0)$ folgenden Ausdruck

$$\bar{t}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_K+\int_{K'}+\int_{\varkappa}\Big),$$

alle Integrale genommen für die Funktion $\frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}$ als Integrand. Lassen wir nun ε zur Grenze übergehen, indem wir t_0 fest denken, so unterscheiden sich je zwei vermöge der Spiegelung am Einheitskreise einander entsprechende Integralelemente, um eine Größe niedrigerer Ordnung, da sich an gegenüberliegenden Punkten einerseits die Integranden um eine gleichmäßig unendlich klein werdende Größe, andererseits die Differentiale dt um eine Größe niedrigerer Ordnung unterscheiden. Wir finden also durch den geschilderten Grenzübergang die Formel

$$\bar{t}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa} \frac{\bar{t}(t)}{t-t_0}dt,$$

eine Formel, welche unmittelbar zeigt, daß die Funktion $\bar{t}(t_0)$, wenn wir jetzt t_0 variabel denken, sich regulär über die Peripherie des Einheitskreises fortsetzen läßt. Die Funktion $\bar{t}(t)$ ist demnach eine in der ganzen Ebene erklärte Funktion, die nur für $t=\infty$, und zwar von der ersten Ordnung, unendlich wird. D. h. die Funktion $\bar{t}(t)$ ist eine lineare Funktion.

Zusammenfassend können wir also das Resultat unserer Analyse des Problems A in folgendem Satz aussprechen:

Zu der gesuchten Funktion $t(x,y)$ gehört eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ der Fläche F, und es ist die Größe t nach ihrer Normierung durch ihre Eigenschaften bis auf eine lineare Funktion derselben vollständig bestimmt. Insbesondere sind je zwei relative Zweige der Funktion $t(x,y)$ durch eine lineare Substitution verknüpft, durch deren Vermittlung der betreffende Normalbereich T in sich transformiert wird.

b) Analyse der Probleme B, C, D, E. Der Unitätssatz.

Es werde mit Φ' die zu der gesuchten Funktion $t'(x,y)$ (Problem B) gehörende *Riemann*sche Fläche bezeichnet, welche als eine Überlagerungsfläche der *Riemann*schen Fläche F der Funktion $y(x)$ zu denken ist. Ich behaupte: die Fläche Φ' ist einfach zusammenhängend, und sie besitzt in jedem Punkte der Menge M, d. i. der Menge der markierten singulären Punkte, in allen ihren relativen Blättern relative Windungspunkte, an welchen jedesmal genau soviel Blätter zusammenhängen, als die diesem Punkte zugeordnete Verzweigungszahl angibt. Die relativen Windungspunkte endlicher Ordnung sind als innere Punkte der Fläche Φ', die unendlich hoher Ordnung hingegen als Grenzpunkte dieser Fläche zu betrachten*).

Was zunächst die Frage des Zusammenhanges der Fläche Φ' anbetrifft, so erkennen wir denselben ebenso wie den Zusammenhang der Fläche Φ in § 2, a). Was jedoch die Ordnungszahl der relativen Windungspunkte anbetrifft, so wird dieselbe in einem einzelnen singulären Punkte, für welchen n die zugeordnete Verzweigungszahl ist, jedenfalls ein Teiler von n sein müssen, weil nach Voraussetzung die Funktion $t'(x,y)$ der betrachteten τ'-Klasse angehören soll. Nehmen wir jetzt an, es sei n_1 ein Teiler von n und es habe die Fläche Φ' an der betrachteten Stelle in einem ihrer relativen Blätter einen relativen Windungspunkt der Ordnung n_1-1. Es sei t_0' der Wert der Funktion $t'(x,y)$ in dem betrachteten Windungspunkte der Fläche Φ', ferner sei a irgend ein Wert, welcher auf der Grenze des einfach zusammenhängenden Bereichs T' liegt, d. i. auf der Grenze des Wertegebietes der Funktion $t'(x,y)$, so bilden wir die Funktion $\sqrt[n_1]{\frac{t'-t_0'}{t'-a}}$.

*) In der Tat muß die gesuchte Funktion $t'(x,y)$ an einem Verzweigungspunkte endlicher Ordnung notwendig den Charakter einer algebraischen Funktion besitzen.

Diese Funktion gehört, wenn man sie als Funktion des Ortes auf der Fläche F auffaßt, der betrachteten τ'-Klasse an, sie müßte also auf Grund der gestellten Bedingungen eine eindeutige Funktion von t' sein, was nicht der Fall ist, da diese Funktion im Punkte t_0' verzweigt ist. Ist $n=\infty$, so nehme man die Funktion $\log \frac{t'-t_0'}{t'-a}$ zu Hilfe.

Die Normierung des Gebietes T' findet wieder entweder auf die ganze euklidische Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises bzw. das Innere der oberen Halbebene statt.

Zusammenfassend finden wir:

Die Riemannsche Fläche Φ', welche zur gesuchten Funktion $t'(x, y)$ gehört, ist eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche F. Diese Überlagerungsfläche hat in jedem der markierten singulären Punkte, und zwar in allen ihren relativen Blättern, relative Windungspunkte gleicher Ordnung, nämlich $n-1$, wenn n die dem betreffenden Windungspunkte zugeordnete Verzweigungszahl ist. Die Funktion $t'(x, y)$ ist durch die von ihr verlangten Eigenschaften unter Hinzunahme der Normierungsbedingung bis auf eine lineare Substitution bestimmt. Insbesondere sind je zwei relative Zweige der Funktion $t'(x, y)$ durch eine lineare Substitution verknüpft.

Untersuchen wir nunmehr die Funktion $t_s(x, y)$ (Problem C). In diesem Falle hatten wir die zugrunde liegende *Riemann*sche Fläche der Funktion $y(x)$ mit F_s, die zu $t_s(x, y)$ gehörende Überlagerungsfläche der Fläche F_s mit Φ_s bezeichnet. An die Spitze der Untersuchung stellen wir folgenden Satz.

Satz: Die Fläche F_s wird durch das vollständige System der Symmetrielinien entweder in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt oder sie bleibt ein zusammenhängendes Ganzes.

Der vorstehende Satz ist die Übertragung eines entsprechenden für symmetrische *Riemann*sche Flächen *algebraischer* Funktionen von Herrn *Klein**) gefundenen Satzes.

Es sei f eins der Flächenstücke, in welche die Fläche F_s durch das vollständige System der Symmetrielinien zerlegt wird. Ich gehe von einem

*) *F. Klein*: „Über *Riemann*s Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale". (Vgl. auch die weitere von mir in der Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." angegebene Literatur, insbesondere Herrn *Klein*s autographierte Vorlesung „*Riemann*sche Flächen".)

Punkt P in f aus, welcher nicht auf einer Symmetrielinie liegt, und beschreibe nun von diesem Punkte aus irgendeine Linie l_1 nach einem Punkte P_1 auf einer an f angrenzenden Symmetrielinie, indem ich auf dem Wege nach P_1 keine Symmetrielinie überschreite, d. h. in f bleibe. Desgleichen beschreibe ich in analoger Weise irgendeine zweite Linie l_2 von P nach einem Punkte P_2, welcher ebenfalls auf einer an die Fläche f angrenzenden Symmetrielinie liegt. Setze ich nun die Linien l_1 und l_2 über die erwähnten Symmetrielinien hinaus fort, so behaupte ich, daß ich beide Male in ein und dasselbe Gebiet f' eintrete. In der Tat entsprechen den Linien l_1 und l_2 vermöge der Symmetrie zwei Linien l_1' und l_2', welche sich zu einem P_1 und P_2 verbindenden Zuge zusammensetzen, der keine Symmetrielinie trifft. Ich gelange also aus f immer nur nach f'. Ebenso kann ich rückwärts von f' nur nach f gelangen. Mithin sind f und f', sofern diese beiden Gebiete nicht ebenfalls identisch sind, die beiden einzigen Gebiete, in welche F_s durch das vollständige System der Symmetrielinien zerlegt ist, da ich, was für eine Bahn ich auch auf F beschreibe, stets abwechselnd nur nach f und f' komme.

Wir wollen in Übertragung der *Klein*schen Bezeichnungsweise auf den hier vorliegenden allgemeinen Fall symmetrischer *Riemann*scher Flächen die *Riemann*sche Fläche F_s im Falle des Zerfalls in zwei Stücke *orthosymmetrisch*, im Falle des Nichtzerfalls *diasymmetrisch* nennen.

Jetzt bezeichne ich mit $[F_s]$ im orthosymmetrischen Falle die eine Hälfte der Fläche F_s, im diasymmetrischen Falle die Fläche F_s selbst, indem ich mir dieselbe von den Symmetrielinien begrenzt vorstelle.

Wir untersuchen nunmehr die Überlagerungsfläche Φ_s der in Problem C gesuchten Funktion $t_s(x, y)$. Die Fläche Φ_s wird vermittelst der Funktion $t_s(x, y)$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Wertegebiet T_s der Größe t_s abgebildet. Jede Funktion der τ_s-Klasse ist nun in bezug auf die Symmetrielinien der Fläche F_s symmetrisch. Insbesondere wird daher durch die Funktion $t_s(x, y)$ die Fläche Φ_s umkehrbar eindeutig und konform auf ein zur Achse des Reellen symmetrisches Gebiet T_s abgebildet, wobei den Symmetrielinien der Fläche F_s jedesmal, das ist für jeden Zweig der Funktion $t_s(x, y)$, ein Stück der Achse des Reellen entspricht. Denkt man sich den Bereich T_s längs der ganzen Achse des Reellen aufgeschnitten, so zerfällt derselbe, weil er zusammenhängend ist, ersichtlich in genau *zwei*

zueinander symmetrische Hälften. Dementsprechend muß auch die Fläche Φ_s in *zwei zueinander symmetrische Hälften* $\Phi_{s,1}$ und $\Phi_{s,2}$ zerfallen, wenn man sich dieselbe längs der Symmetrielinien in allen relativen Blättern aufgeschnitten denkt. Ich behaupte nun weiter, daß die beiden zueinander symmetrischen Hälften des Bereichs T_s, $T_{s,1}$ und $T_{s,2}$, *einfach zusammenhängend* sind. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde es zwei in bezug auf die Achse des Reellen zueinander symmetrische, voneinander verschiedene Begrenzungslinien des Bereichs T_s geben. Ist $t_{s,1}$ ein Punkt auf der einen dieser Begrenzungslinien, $t_{s,2}$ der zu diesem symmetrische Punkt auf der andern Begrenzungslinie, so ist die Funktion $\sqrt{(t_s-t_{s,1})(t_s-t_{s,2})}$ auf der ganzen Achse des Reellen reell. Ferner ist sie in T_s eine *zweideutige* Funktion von t_s und gehört andererseits, betrachtet als Funktion des Ortes auf F_s, der τ_s-Klasse an, so daß sie auf Grund der für t_s gestellten Bedingungen eine *eindeutige* Funktion von t_s sein müßte.

Die Bereiche $T_{s,1}$ und $T_{s,2}$ und folglich $\Phi_{s,1}$ und $\Phi_{s,2}$ sind somit in der Tat *einfach zusammenhängend*. Die Fläche $\Phi_{s,1}$ überdeckt ersichtlich mit keinem ihrer Blätter eine Symmetrielinie der Fläche $[F_s]$, sie ist vielmehr eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche $[F_s]$ ohne relative Windungspunkte.

Die Größe t_s ist nun durch ihre Eigenschaften bis auf eine Normierung wieder vollständig bestimmt. Denn sind $t_s^{(1)}$ und $t_s^{(2)}$ etwa zwei Funktionen der in Problem C geforderten Beschaffenheit, so würde man eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Wertegebietes $T_s^{(1)}$ auf das Wertegebiet $T_s^{(2)}$ erhalten, wobei noch die reellen Punkte wieder in reelle Punkte übergehen. Insbesondere würde sich also eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der oberen Hälfte $T_{s,1}^{(1)}$ von $T_s^{(1)}$ auf die obere Hälfte $T_{s,1}^{(2)}$ von $T_s^{(2)}$ ergeben, ev. auch auf die untere Hälfte $T_{s,2}^{(2)}$. Es ist nun naheliegend, die Größe t_s dadurch zu normieren, daß man auf Grund des *Osgood*schen Satzes die Fläche $T_{s,1}$ umkehrbar eindeutig konform auf die ganze obere Halbebene abbildet und symmetrisch entsprechend $T_{s,2}$ auf die ganze untere Halbebene. Bei dieser Abbildung gehen die reellen Begrenzungsstücke des Bereichs $T_{s,1}$ in regulärer Weise wieder in Stücke der Achse des Reellen über, weil längs der reellen Begrenzungsstücke des Bereichs $T_{s,1}$ die zugleich mit der Abbildung existierende *Green*sche Funktion gleichmäßig Null wird, also eine analytische Fortsetzung über die Achse des Reellen hinaus

gemäß dem Spiegelungsprinzip möglich ist. Nach Einführung der genannten Normierungsbedingung ist die Funktion $t_s(x, y)$ bis auf eine lineare Transformation mit reellen Koeffizienten vollständig bestimmt. Wir erhalten das Resultat:

Die Riemannsche Fläche Φ_s besteht aus zwei zueinander symmetrischen einfach zusammenhängenden Hälften $\Phi_{s,1}$ und $\Phi_{s,2}$. Die Fläche $\Phi_{s,1}$ ist eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche $[F_s]$ ohne relative Windungspunkte. Die Funktion $t_s(x, y)$ ist nach Einführung der Normierungsbedingung bis auf eine reelle lineare Substitution bestimmt.

Untersuchen wir nun in gleicher Weise die Funktion $t'_s(x, y)$ (Problem D), welche einer bestimmten τ'_s-Klasse angehört, so finden wir:

Die Fläche Φ'_s besteht aus zwei zueinander symmetrischen einfach zusammenhängenden Hälften $\Phi'_{s,1}$ und $\Phi'_{s,2}$. Die Fläche $\Phi'_{s,1}$ ist eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche $[F_s]$, welche in den auf $[F_s]$ markierten singulären Punkten relative Windungspunkte der angegebenen Ordnung besitzt und zwar in allen relativen Blättern. Die Funktion $t_s(x, y)$ ist nach Einführung der Halbebenen-Normierung bis auf eine reelle lineare Substitution bestimmt.

Die entsprechende Untersuchung für die in Problem E gesuchte Funktion $t''_s(x, y)$ führt zu dem Resultat:

Die Riemannsche Fläche Φ''_s der Funktion $t''_s(x, y)$ besteht aus zwei zueinander symmetrischen einfach zusammenhängenden Hälften $\Phi''_{s,1}$ und $\Phi''_{s,2}$, welche man erhält, indem man die Fläche Φ''_s längs der Realitätszüge durch alle relativen Blätter hindurch aufgeschnitten denkt. Die Fläche $\Phi''_{s,1}$ ist eine Überlagerungsfläche der Fläche $|F_s|$, wobei mit $|F_s|$ die längs der Realitätszüge aufgeschnitten gedachte Fläche F_s bezeichnet wird, welche dabei zusammenhängend bleibt. Die Fläche $\Phi''_{s,1}$ besitzt in den im Innern von $|F_s|$ markierten singulären Punkten in allen relativen Blättern Windungspunkte, für deren einzelnen die Blätterzahl stets mit der dem betreffenden singulären Punkte zugeordneten Verzweigungszahl übereinstimmt.

Zur Begründung der vorstehend bezüglich der Größen $t'_s(x, y)$ und $t''_s(x, y)$ angegebenen Resultate begnügen wir uns mit folgenden kurzen Bemerkungen. Um die Behauptung betreffend die relativen Windungspunkte der Flächen $\Phi'_{s,1}$ darzutun, hat man analog wie oben bei der Untersuchung der relativen Windungspunkte der Fläche Φ' eine Hilfs-

funktion von t'_s heranzuziehen. Als solche eignet sich diejenige elementare Funktion, welche man erhält, wenn man, mit $a+ib$ und $a-ib$ zwei passende konjugiert komplexe Werte in der t'_s-Ebene bezeichnend, die *Riemann*sche Fläche der Funktion $\sqrt[n_1]{\frac{t'_s-(a+ib)}{t'_s-(a-ib)}}$ bzw. $\log\left(\frac{t'_s-(a+ib)}{t'_s-(a-ib)}\right)$ als Funktion von t' umkehrbar eindeutig und konform auf die schlichte Ebene derart abbildet, daß dabei die Achse des Reellen in sich übergeht. Ebenso ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung über diejenigen relativen Windungspunkte der Fläche Φ''_s, welche nicht mit den Endpunkten der Realitätszüge koinzidieren. Für die letzteren ist zu zeigen, daß dieselben für die Funktion $t''_s(x,y)$ Verzweigungspunkte erster Ordnung sein müssen, eine Behauptung, die, sofern ja t''_s der τ''_s-Klasse angehören soll, bewiesen ist, wenn gezeigt ist, daß die Funktion $t''_s(x,y)$ *nur* längs der Realitätszüge reell sein kann. Letzteres ist nun in der Tat eine unmittelbare Folge der Uniformisierungseigenschaft dieser Funktion. Ist nämlich etwa P ein Punkt auf F_s, welcher nicht auf einer der Symmetrielinien liegt, und hätte $t''_s(x,y)$ in diesem Punkte einen reellen Wert, so müßte $t''_s(x,y)$ aus Gründen der symmetrischen Spiegelung denselben Wert auch in dem zu P symmetrischen Punkte annehmen, was in der Tat der Uniformisierungseigenschaft widerspricht. Ist andererseits P ein auf einer Symmetrielinie, jedoch nicht auf einem Realitätszuge liegender Punkt, in welchem $t''_s(x,y)$ einen reellen Wert annehmen möge, so wird man aus Gründen der Symmetrie auf der Überlagerungsfläche Φ''_s einen über der betreffenden Symmetrielinie verlaufenden Linienzug angeben können, welcher aus lauter Punkten P derselben erwähnten Beschaffenheit besteht und nach beiden Seiten auf Φ''_s soweit geführt zu denken ist, bis er entweder auf den Endpunkt eines Realitätszuges trifft oder an die Grenze der Fläche Φ''_s gelangt. Diesem Linienzug entspricht in der t''_s-Ebene ein Stück $\alpha\ldots\beta$ der Achse des Reellen. Die Funktion

$$\sqrt{\frac{t''_s-\alpha}{t''_s-\beta}} \quad \text{oder} \quad i\sqrt{\frac{t''_s-\alpha}{t''_s-\beta}}$$

ist dann, betrachtet als Funktion des Punktes (x,y), eine Funktion der τ''_s-Klasse und müßte also wegen der vorausgesetzten Uniformisierungseigenschaft der Größe t''_s als Funktion dieser Größe in T''_s eindeutig sein, was nicht der Fall ist.

Wir haben in diesem Paragraphen Gewicht darauf gelegt, die Untersuchung der Natur der Überlagerungsflächen $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$ streng lediglich auf die vorausgesetzten Eigenschaften der gesuchten Uniformisierungstranszendenten zu gründen, ohne dabei die Existenz der zu einer beliebigen *Riemann*schen Fläche gehörenden einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche und der durch dieselbe vermöge des allgemeinen Uniformisierungsprinzips bestimmten Uniformisierungstranszendenten (§ 3—4) als bekannt vorauszusetzen. Setzen wir jedoch die Entwicklungen in § 3—4 voraus, so läßt sich die Behauptung, daß die Größen t, t', t_s, t_s', t_s'' durch die in § 1 gestellten Uniformisierungseigenschaften wesentlich vollständig charakterisiert sind, nachträglich leicht beweisen. (S. die Fußnote auf S. 277).

§ 3. *Konstruktion der Überlagerungsflächen* $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$.

Bevor wir zur Konstruktion der Flächen $\Phi, \Phi', \Phi_s, \Phi_s', \Phi_s''$ übergehen, schicken wir die Bemerkung voraus, daß offenbar gemäß der Definition die Fläche $\Phi_{s,1}$ (das war die eine Hälfte der Fläche Φ_s) in bezug auf die Fläche $[F_s]$ als Grundfläche genau ebenso definiert ist, wie die Fläche Φ in bezug auf F als Grundfläche. Ebenso geht Φ_s' aus $[F_s]$ und Φ_s'' aus $\{F_s\}$ in analoger Weise hervor wie Φ' (eventuell Φ^*)) aus F. Die Konstruktion der fünf Flächen wird also erledigt sein, wenn wir gelernt haben, die Flächen Φ und Φ' zu konstruieren.

Zu dem Zwecke knüpfen wir an die Darlegung in § 2 des ersten Teiles an. Wir hatten dort, ausgehend von der Darstellung der Fläche F als Grenze von Näherungsflächen in der Gestalt $F = \lim_{n=\infty} F_n$, $F_1 < F_2 < F_3 < \cdots$, eine Überlagerungsfläche

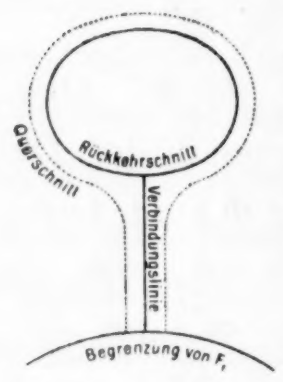
$$\Phi = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F'} = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F_n'}$$

konstruiert, welche relativ zu F regulär ist und frei von relativen Windungspunkten, ferner schlichtartig, jedoch nicht einfach zusammenhängend. Um zu einer einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche zu gelangen, haben wir nur nötig, eine gewisse Änderung in der a. a. O. geschilderten Konstruktion vorzunehmen. Zunächst ist es wesentlich, daß bei der Wahl der

---

*) Der Umstand, daß die Fläche Φ_s'' zu $\{F_s\}$ in derselben Beziehung steht wie Φ zu F tritt in dem Falle ein, in welchem außer den Endpunkten der Realitätszüge keine weiteren relativen Verzweigungspunkte für die Funktion $t_s''(x, y)$ vorgeschrieben sind.

Näherungsflächen F_n noch folgender Bedingung genügt wird: Es soll keine der Begrenzungslinien von F_n auf der Fläche F ein zusammenhängendes, außerhalb F_n liegendes *inneres* Stück der Fläche F vollständig abgrenzen. Dieser Bedingung kann in der Tat leicht genügt werden (vgl. S. 205 des ersten Teiles). Anstatt nun die Näherungsflächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bezüglich durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Rückkehrschnitte schlichtartig zu machen, benutzen wir jetzt $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von Rand zu Rand laufende Querschnitte. Zu diesen Querschnitten gelangen wir, ausgehend von den Rückkehrschnitten in folgender Weise: Wir nehmen etwa einen der r_1 Rückkehrschnitte innerhalb der Näherungsfläche F_1 und verbinden einen Punkt dieses Rückkehrschnittes mit einem Punkte der Begrenzung von F_1, so daß diese Verbindungslinie keinen der r_1 in F_1 konstruierten Rückkehrschnitte trifft. Dasselbe machen wir mit den übrigen r_1-1 Rückkehrschnitten. Die so gezogenen r_1 getrennt verlaufenden *Verbindungslinien* nach dem Rande zusammen mit den r_1 Rückkehrschnitten liefern uns unmittelbar r_1 Querschnitte, indem wir von einem einzelnen Rückkehrschnitte mit zugehörender „*Verbindungslinie*“ zu einer benachbart verlaufenden sich selbst nicht treffenden Linie übergehen, welche von einem Randpunkte nach einem anderen Randpunkte läuft (vgl. die schematische Figur, in welcher der gefundene Querschnitt punktiert angedeutet ist).



Die soeben gezogenen r_1 Querschnitte innerhalb F_1 wollen wir als *Querschnitte erster Art* bezeichnen. Durch dieselben braucht die Fläche F_1 noch nicht einfach zusammenhängend geworden zu sein, vielmehr ist ihr Zusammenhang jetzt gleich $m + r_1$, wenn m die Anzahl der Begrenzungslinien der unaufgeschnittenen Fläche F_1 bezeichnet. Um die Fläche F_1 einfach zusammenhängend zu machen, hat man noch innerhalb der aufgeschnittenen Fläche F_1 weitere Querschnitte von Rand zu Rand zu ziehen. Die durch die r_1 Querschnitte erster Art aufgeschnittene Fläche F_1 heiße φ_1. Die Fläche φ_1 ist schlichtartig, d. h. es ist ihr Zusammenhang gleich der Anzahl ihrer Begrenzungslinien, nämlich gleich $m + r_1$. Wir können die Fläche φ_1 daher durch $m + r_1 - 1$ weitere Querschnitte (*Querschnitte zweiter Art*) in eine einfach zusammenhängende Fläche F_1' verwandeln. Die Querschnitte verlaufen ganz im Innern von φ_1, indem jeder derselben zwei voneinander verschiedene Begrenzungspunkte von φ_1, die auf verschiedenen

Begrenzungslinien von φ_1 liegen, miteinander verbindet. Die Querschnitte zweiter Art sollen dabei weder untereinander noch mit den Querschnitten erster Art einen Punkt gemeinschaftlich haben. Demnach haben sämtliche Querschnitte erster und zweiter Art ihre beiden Endpunkte auf den Begrenzungslinien von F_1.

Gehen wir nun zur Fläche F_2 über. Die Fläche F_2 entsteht aus F_1, indem an jede Begrenzungslinie von F_1 ein mehrfach zusammenhängendes Zusatzflächenstück angefügt wird, welches außer der betreffenden Begrenzungslinie von F_1 mindestens noch eine weitere Begrenzungslinie besitzt, die von ersterer völlig getrennt ist. Wir behandeln nun zunächst jedes der Zusatzstücke ebenso wie die Fläche F_1. Das einzelne Zusatzstück α wird also in eine einfach zusammenhängende Fläche α' verwandelt. Dabei können wir noch folgenden Nebenbedingungen genügen: Die bei der Zerschneidung von α benötigten *Querschnitte erster Art* sollen ihre Endpunkte sämtlich auf den neu hinzugekommenen Begrenzungslinien haben, von den *Querschnitten zweiter Art* hingegen soll nur einer auf der anstoßenden Begrenzungslinie von F_1 endigen und zwar in einem Punkte, in welchem ein Querschnitt zweiter Art von F_1 endigt. Denken wir uns nun bei allen Zusatzflächenstücken die Aufschneidung den angegebenen Bedingungen gemäß ausgeführt, so haben wir, um zu einer vollständigen einfach zusammenhängenden Zerschneidung der Fläche F_2 zu gelangen, nur noch nötig, die auf den Begrenzungslinien von F_1 frei endigenden Querschnitte erster und zweiter Art der Fläche F_1 über diese Begrenzungslinie hinaus in das anstoßende Zusatzflächenstück α' fortzusetzen, bis sie auf eine Begrenzungslinie von F_2 treffen, ohne vorher die Begrenzung von α' nochmals zu treffen. Bei dieser Aufschneidung wird das einzelne Zusatzstück α' allerdings in mehrere einfach zusammenhängende Teile zerlegt werden. Jeder Teil stößt jedoch längs eines Stückes der betreffenden Begrenzungslinie von F_1 an das einfach zusammenhängende Gebiet F_1' an, dieses nur erweiternd, ohne den Zusammenhang desselben zu ändern. Das Wesentliche ist, daß die Fläche F_2 durch ein Querschnittsystem in eine einfach zusammenhängende Fläche F_2' verwandelt ist, wobei jeder einzelne Querschnitt zwei voneinander verschiedene Randpunkte von F_2 miteinander verbindet. Soweit dieses Querschnittsystem in F_1 verläuft, ist es mit dem vorher in F_1 konstruierten Querschnittsystem identisch. Die Fläche F_1' ist demnach ein in sich zusammenhängender Teil der Fläche F_2'.

In der angegebenen Weise können wir fortfahren. Wir behalten, nachdem F_2 in der beschriebenen Art in eine einfach zusammenhängende Fläche F_2' verwandelt ist, diese Zerschneidung vollständig bei, indem wir nun F_3 in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, lediglich durch Vervollständigung der bereits in F_2 ausgeführten Zerschneidung, wobei F_2' ein in sich zusammenhängender Teil von F_3' wird.

Wird allgemein mit F_n' die Fläche F_n bezeichnet, nachdem dieselbe in der beschriebenen Weise in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt ist, so erkennen wir, daß die Fläche $F' = \lim_{n=\infty} F_n'$ sich als die mit einer Zerschneidung ausgestattete Fläche F darstellt, welche durch diese Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende, mit F' bezeichnete Fläche verwandelt ist. Der einzelne Schnitt nähert sich dabei, rückwärts oder vorwärts verfolgt, stets der Grenze des Bereichs F, und keine zwei Schnitte begegnen sich. Wir unterscheiden an jedem Schnitte zwei Seiten und gelangen nun in einfachster Weise zur Konstruktion der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ, welche zu F gehört*).

Wir denken uns die Fläche F' in unendlich vielen Exemplaren verfügbar und gehen von einem Grundexemplar F' aus dadurch zu einer Fläche $\overset{(1)}{F'}$ über, daß wir an jede Querschnittseite von F' ein neues Exemplar F' anheften und zwar mit dem gegenüberliegenden Ufer. Die Fläche $\overset{(1)}{F'}$ wird dann ebenso wie F' von unendlich vielen Querschnittseiten begrenzt. Indem wir an jede Seite von $\overset{(1)}{F'}$ ein neues Exemplar F' anheften, gelangen wir zu einer Fläche $\overset{(2)}{F'}$ usw. Die Flächen $F', \overset{(1)}{F'}, \overset{(2)}{F'}, \ldots$ sind sämtlich einfach zusammenhängend, weil allgemein $\overset{(n+1)}{F'}$ aus $\overset{(n)}{F'}$ entsteht, indem man längs jedes einzelnen Begrenzungsstückes von $\overset{(n)}{F'}$ ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, nämlich ein Exemplar F', anheftet. Die Grenzfläche $\Phi = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F'}$ ist daher ebenfalls einfach zusammenhängend und besitzt die von uns verlangten Eigenschaften.

Will man die Fläche Φ als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender, endlich-vielblättriger Näherungsflächen darstellen, so braucht man nur zu setzen

---

*) Vgl. die in § 2 des ersten Teiles dargelegte Methode zur Bildung schlichtartiger Überlagerungsflächen.

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F'_n},$$

indem man allgemein unter $\overset{(\nu)}{F'_n}$ eine einfach zusammenhängende Fläche versteht, welche aus F_n genau in derselben Weise entsteht wie $\overset{(\nu)}{F'}$ aus F, nämlich durch Anheften immer neuer Exemplare F'_n an die Querschnittseiten der Flächen F'_n, $\overset{(1)}{F'_n}$, $\overset{(2)}{F'_n}$, ...

Um die einfach zusammenhängende Fläche Φ' mit den vorgeschriebenen relativen Windungspunkten zu erhalten, hat man nur nötig, ebenso wie in § 2 des ersten Teiles, nach Konstruktion der Querschnitte in den Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$, von den markierten Punkten aus noch *Einschnitte* nach den Begrenzungslinien von $F_1, F_2, F_3, \ldots$ zu ziehen, welche offenbar gar keine Störung verursachen und am Zusammenhang nichts ändern. Nennen wir die so aufgeschnittenen Näherungsflächen $F''_1, F''_2, F''_3, \ldots$, so erhalten wir, indem wir nun den Überlagerungsprozeß ganz nach Analogie des soeben geschilderten ausführen, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jeder Einschnitt zwei *Einschnittseiten* hat und daß zwei sich gegenüberliegende Einschnittseiten jedesmal, wenn an dem betreffenden singulären Punkte bei dem Überlagerungsprozeß ein Windungspunkt der gewünschten Ordnung zustande gekommen ist, wie in § 2 des ersten Teiles zusammengeheftet werden, die gesuchte einfach zusammenhängende Fläche Φ' in der Gestalt

$$\Phi' = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F''} = \lim_{n=\infty} \overset{(n)}{F'''_n}.$$

Die Flächen Φ und Φ' sind durch ihre Eigenschaft als einfach zusammenhängende Überlagerungsflächen der Fläche F mit den vorgeschriebenen relativen Windungspunkten bzw. mit der Bedingung des Fehlens von relativen Windungspunkten vollständig bestimmt. Seien nämlich etwa Φ'_1 und Φ'_2 zwei einfach zusammenhängende Überlagerungsflächen mit denselben vorgeschriebenen Windungspunkten, so ordne man irgendeinem Punkte von Φ'_1 einen Punkt von Φ'_2 zu, welcher relativ zu F mit ersterem Punkte koinzidiert. Diese Zuordnung vermöge Koinzidenz kann man sich dann über die Flächen Φ'_1 und Φ'_2 hin fortgesetzt denken, indem man den Punkt variabel denkt. Es entsteht auf diese Weise eine relativ unverzweigte Abbildung der Fläche Φ'_1 auf die Fläche Φ'_2, eine Abbildung, welche, weil die Flächen einfach zusammenhängend sind, eine *umkehrbar eindeutige*

Punktzuordnung darstellt. Damit ist die Identität der beiden Flächen Φ_1' und Φ_2' bewiesen.

Es sei zum Schluß noch folgendes bemerkt.

Man kann, um zur Fläche Φ' mit den gegebenen relativen Windungspunkten zu gelangen, zunächst die Fläche Φ ohne relative Windungspunkte konstruieren. Markiert man nun auf Φ in allen relativen Blättern die auf F gegebenen relativen Windungspunkte mit den betreffenden Verzweigungszahlen, so kann man nunmehr über Φ als Grundfläche die zugehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche mit den auf Φ markierten relativen Windungspunkten konstruieren. Die sich auf diese Weise ergebende Fläche ist dann die gesuchte Fläche Φ'.

Weiter sei erwähnt, daß man die Konstruktion der Fläche Φ ihrerseits in zwei Schritte zerlegen kann, indem man zunächst über F die in § 2 des ersten Teils konstruierte schlichtartige unendlich-vielfach zusammenhängende dort mit Φ bezeichnete Fläche konstruiert und darauf über dieser Fläche als Grundfläche die zugehörende einfach zusammenhängende Fläche ohne relative Windungspunkte, welch letztere die von uns gesuchte Fläche Φ ist.

Der Beweis für die Zulässigkeit der angegebenen Zerlegung der Konstruktion der Flächen Φ und Φ' in mehrere Schritte ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß die bei den angegebenen Einzeloperationen schließlich gefundenen Flächen tatsächlich einfach zusammenhängend sind und die vorgeschriebenen relativen Windungspunkte gegen F besitzen.

§ 4. *Existenz der gesuchten Uniformisierungstranszendenten. Zugeordnete Gruppe und unabhängiges Erzeugendensystem derselben.*

Die Existenz der Funktionen $t(x, y)$ und $t'(x, y)$ versteht sich jetzt auf Grund unseres allgemeinen im ersten Teile bewiesenen Abbildungsprinzips von selbst, da ja die Funktionen $t(x, y)$ und $t'(x, y)$ als diejenigen Funktionen charakterisiert sind, durch deren Vermittlung die Flächen Φ bzw. Φ' auf die Fläche des Einheitskreises oder eventuell die ganze Ebene abgebildet werden. Wir haben also nur dieses Prinzip im Falle des einfach zusammenhängenden Bereichs anzuwenden*) und den bei der Abbildung sich ergebenden schlichten einfach zusammenhängenden von einem Schlitze oder Punkte begrenzten Bereich nachträglich noch auf das

*) S. auch die in § 14 des ersten Teiles angeführte Literatur.

Innere des Einheitskreises oder auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes abzubilden. Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ werden dabei eindeutige linear automorphe Funktionen, indem dieselben bei gewissen linearen Substitutionen des Arguments ungeändert bleiben. In der Tat sind $x(t)$ und $y(t)$ relativ zu t unverzweigte Funktionen; außerdem ist das Wertegebiet T der Variabeln t ein einfach zusammenhängender Bereich. Daraus folgt, daß die genannten Funktionen eindeutige Funktionen von t sind. In derselben Weise ergibt sich, daß alle Funktionen der τ-Klasse eindeutige Funktionen der Größe t werden. Zwei Stellen t_1 und t_2, die wir uns variabel vorstellen, für welche $x(t_1)=x(t_2)$ und $y(t_1)=y(t_2)$ ist, hängen notwendig durch eine lineare Substitution zusammen, durch welche der Einheitskreis bzw. die ganze Ebene in sich transformiert wird. Zwei derartige Punkte t_1 und t_2 sind nämlich die Bilder zweier relativ zu F koinzidierenden Punkte der Fläche Φ. Diese Koinzidenzbeziehung kann über die ganze Fläche Φ hin fortgesetzt gedacht werden, wobei die Fläche Φ umkehrbar eindeutig konform auf sich selbst bezogen wird. Diese Beziehung überträgt sich sofort auf den Bereich T und ist also auf Grund des *Poincaré*schen Satzes (S. 262 oben) eine lineare Substitution*).

*) Nachdem die Existenz der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ bewiesen und die Funktion $t(x,y)$ konstruiert ist als diejenige Funktion, durch deren Vermittlung Φ umkehrbar eindeutig konform auf ein schlichtes Gebiet abgebildet wird, können wir leicht erkennen, daß die auf Seite 254 gemachte Voraussetzung, daß die Funktion $\tau(t)$ bei *jeder beliebigen* Zuordnung der Zweige eindeutig sein soll, durch die weniger verlangende Voraussetzung ersetzt werden kann, daß die erwähnte Eindeutigkeit nur bei *passender* Zuordnung der Zweige stattfinden soll, indem dann die weitergehende erste Voraussetzung bereits eine Folge der letzteren wird. Zu dem Zwecke möge die konstruierte Fläche Φ mit Φ^*, die dazu als Abbildungsfunktion konstruierte Funktion $t(x,y)$ mit $t^*(x,y)$ bezeichnet werden, während $t(x,y)$ und Φ die alten Bedeutungen haben mögen, nämlich als gesuchte den Bedingungen des Problems A genügende Funktion und zugehörende über F ausgebreitete *Riemann*sche Fläche, wobei jedoch jetzt die Eindeutigkeit der Funktion $\tau(t)$ nur bei *passender* Zuordnung der Zweige verlangt wird. Wir schließen so: Da $t^*(x,y)$ der τ-Klasse angehört, muß $t^*(t)$ bei passender Zuordnung der Zweige eine eindeutige Funktion sein. Andererseits wird bei derselben Zuordnung der Zweige $t(t^*)$ eine eindeutige Funktion, weil tatsächlich jede Funktion der τ-Klasse, also auch t eine eindeutige Funktion von t^* ist und zwar sogar bei beliebiger Zuordnung der Zweige. Dies besagt folgendes: Die über F ausgebreiteten Flächen Φ und Φ^* lassen sich durch Punktkoinzidenz (relativ zu F) umkehrbar eindeutig aufeinander abbilden; diese Flächen sind also identisch. Entsprechende Bemerkungen gelten in bezug auf die Größen t' usw.

Die Gesamtheit aller sich auf diese Weise ergebenden Substitutionen bildet eine in dem Bereiche T (Einheitskreis oder ganze euklidische Ebene) *eigentlich diskontinuierliche* Gruppe, für welche wir sofort einen Fundamentalbereich angeben können. Wir erhalten einen solchen, indem wir die Fläche F', wie wir sie zur Bildung der Fläche benutzt haben, durch die Funktion $t(x,y)$ abbilden. Jedem Seitenpaar der Fläche F' entspricht eine bestimmte erzeugende Substitution der Gruppe. Wir erkennen auch, daß das so gefundene Erzeugendensystem ein *unabhängiges Erzeugendensystem* ist. Werden die erzeugenden Substitutionen mit $S_1, S_2, S_3, \ldots$ bezeichnet (die Anzahl derselben ist im allgemeinen unendlich groß), so lassen sich alle Substitutionen der Gruppe in der Form

$$S_{a_1}^{b_1} S_{a_2}^{b_2} S_{a_3}^{b_3} \cdots S_{a_\nu}^{b_\nu}$$

darstellen, wobei mit ν, $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\nu$ beliebige ganze positive Zahlen, mit $b_1, b_2, \ldots b_\nu$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bezeichnet sind. Die Behauptung der Unabhängigkeit des Erzeugendensystems besagt, daß die Substitutionen der angegebenen Form als lineare Substitutionen alle voneinander verschieden sind. Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus dem Aufbau der Fläche Φ aus den Grundexemplaren F'.

Den vorhergehenden Bemerkungen brauchen kaum wesentlich neue Bemerkungen hinzugefügt zu werden, um die entsprechenden Tatsachen bezüglich der Funktion $t'(x,y)$ zu begründen. Die Funktion $t'(x,y)$ wird durch konforme Abbildung der Fläche Φ' auf das Innere des Einheitskreises bzw. die ganze euklidische Ebene erhalten, und es werden ersichtlich auch $x(t')$ und $y(t')$ eindeutige Funktionen von t' innerhalb des erwähnten Gebietes, das wir mit T' bezeichnen, sowie überhaupt alle Funktionen der τ'-Klasse. Die Gruppe der Substitutionen, bei welchen die Funktionen $x(t')$ und $y(t')$ simultan ungeändert bleiben, ist eine Gruppe aus lauter linearen Substitutionen, und wir erhalten durch Vermittlung der Fläche F'', welche uns oben als Grundexemplar zur Konstruktion der Fläche Φ' diente, einen Fundamentalbereich dieser Gruppe und zugleich damit ein *unabhängiges Erzeugendensystem*, unabhängig in dem Sinne, daß selbstverständlich für die den relativen Windungspunkten endlicher Ordnung zugeordneten elliptischen Substitutionen die Relation besteht, welche ausdrückt, daß die Substitution bei der betreffenden Anzahl von Wiederholungen die identische Substitution ergibt. Die an den gegebenen

relativen Windungspunkten unendlich hoher Ordnung sich ergebenden linearen Umlaufssubstitutionen sind *parabolisch*, wie ich in der Abhandlung Math. Ann. Bd. 67 unter allgemeineren Voraussetzungen zeige (S. 155 ff.).

Für den vorliegenden Fall kann der Beweis folgendermaßen geführt werden.

Um den betreffenden relativen Windungspunkt $x=a$, den wir uns etwa als einen gewöhnlichen im Endlichen liegenden Punkt vorstellen, werde ein kleiner Kreis k_ϱ mit dem Radius ϱ konstruiert. Wir untersuchen die konforme Abbildung des Inneren dieses Kreises durch die Funktion $t(x,y)$ und nehmen sogleich an, daß wir es mit dem nichteuklidischen Fall zu tun haben, da im euklidischen Fall die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar klar ist. Wir denken zum Zwecke des Beweises das Wertegebiet T als obere Halbebene normiert. Die zu untersuchende Substitution werde als hyperbolisch in der Form $t'=c\cdot t$ angenommen, wobei mit c eine von Null und Eins verschiedene reelle positive Konstante bezeichnet wird. Es wird nun der genannten Kreislinie k_ϱ, die man sich dabei unendlich oft durchlaufen zu denken hat, eine den Nullpunkt mit dem unendlich fernen Punkt verbindende Linie l in der t-Ebene entsprechen. Die Linie l teilt die obere Halbebene in zwei Teile, deren einer G_ϱ dem Inneren des Kreises k_ϱ entspricht. In G_ϱ nimmt die Funktion $x(t)$ nur Werte an, die der Ungleichheitsbedingung $|x-a|<\varrho$ genügen. Läßt man jetzt ϱ unendlich klein werden, so ergibt sich, daß die Funktion $x(t)$ längs desjenigen Teiles der Achse des Reellen, welcher das Gebiet G_ϱ begrenzt, stetig in den konstanten Wert a übergeht. Die Funktion $x(t)$ würde demnach über die Achse des Reellen hinaus analytisch fortgesetzt werden können und, da sie längs eines Stückes der Achse des Reellen konstant ist, überhaupt konstant sein, was offenbar nicht der Fall ist.

Was nun die Funktionen $t_s(x,y)$, $t_s'(x,y)$, $t_s''(x,y)$ anbetrifft, so werden dieselben erhalten, indem man die einfach zusammenhängenden Flächen $\Phi_{s,1}$, $\Phi_{s,1}'$, $\Phi_{s,1}''$ umkehrbar eindeutig konform auf die obere Halbebene abbildet. Es bedarf noch eines besonderen Nachweises, daß die so als Abbildungsfunktion gefundenen Funktionen t_s, t_s', t_s'' sich über die mit den Realitätszügen koinzidierenden Begrenzungslinien der genannten Überlagerungsflächen *regulär analytisch fortsetzen* lassen. Daß dies tatsächlich so ist, ergibt sich auf Grund des Spiegelungsprinzips für Potentialfunktionen aus der

Bemerkung, daß jedenfalls die zugleich mit der Abbildungsfunktion existierende *Green*sche Funktion stetig in den Wert Null übergeht, wenn man sich gleichmäßig einer solchen Begrenzungslinie nähert, nämlich darum, weil die genannte Abbildungsfunktion eine Abbildung der erwähnten Fläche auf das *ganze* Innere der oberen Halbebene liefert. (S. auch Zeile 10 ff. von unten).

Die zwischen den verschiedenen Zweigen der Funktionen $t_s(x, y)$ usw. bestehenden reellen linearen Substitutionen bilden eine stets auch auf der Achse des Reellen selbst eigentlich diskontinuierliche Gruppe. Diese Gruppe enthält in folgenden Fällen, und zwar nur in diesen Fällen, auch Substitutionen mit *negativer Determinante*, welche eine Vertauschung der oberen und unteren Halbebene bewirken: bei t_s und t_s', wenn F_s *dia*symmetrisch ist; bei t_s'' stets, insofern als jedenfalls die zu einem Endpunkte eines Realitätszuges gehörende elliptische Substitution negative Determinante hat.

§ 5. *Die Alternative des euklidischen und nichteuklidischen Falles.*

Es werde hier noch eine Untersuchung angestellt, betreffend die Entscheidung über die Alternative zwischen endlicher Kreisfläche (*nichteuklidischer Fall*) und ganzer euklidischer Ebene (*euklidischer Fall*). Ist zunächst die Fläche F selbst einfach zusammenhängend, so ist die Fläche Φ mit der Fläche F identisch. Die Frage, ob eine einfach zusammenhängende Fläche B auf den Einheitskreis oder auf die ganze Ebene abzubilden ist, läßt sich in speziellen Fällen speziell entscheiden.

Einige Fälle, in welchen die Entscheidung sofort zugunsten der endlichen Kreisfläche getroffen werden kann, mögen besonders erwähnt werden.

Hat der Bereich B, wie z. B. $\Phi_{s,1}$, ein *Linienstück als Begrenzung* oder Teil seiner Begrenzung von der Art, daß man sich die Fläche B über dieses Begrenzungsstück hinaus erweitert denken kann zu einer Fläche $\overline{B}$, die wir uns auch als einfach zusammenhängend vorstellen dürfen, so ist B stets auf die *Fläche des Einheitskreises* abbildbar, nicht auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes.

Die vorstehende Behauptung ergibt sich sofort aus folgenden Bemerkungen. Nach dem allgemeinen Satze kann man $\overline{B}$ auf ein schlichtes Gebiet abbilden. Bei dieser Abbildung geht B in einen Teil der schlichten Ebene über, wobei nun notwendig ein zweidimensionales Stück der Ebene

unbedeckt bleibt. Durch lineare Transformation kann man erreichen, daß das ganze Gebiet außerhalb des Einheitskreises unbedeckt bleibt. Ein solches Gebiet kann nun aber in der Tat nicht auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes abgebildet werden zufolge den Bemerkungen S. 260.

Wesentlich aus denselben Gründen kann überhaupt eine einfach zusammenhängende Fläche, welche ein *zweidimensionales Stück der Ebene unbedeckt* läßt, dabei jedoch unendlich-vielblättrig sein kann, stets nur auf eine endliche schlichte Kreisfläche abgebildet werden. Denn nehmen wir etwa an, was gestattet ist, daß der abzubildende Bereich das ganze Äußere des Einheitskreises unbedeckt läßt und daß es möglich ist, diesen Bereich umkehrbar eindeutig konform auf die ganze Ebene exkl. allein des unendlich fernen Punktes abzubilden, so würde die Umkehrungsfunktion dieser Abbildungsfunktion eine analytische Funktion sein, die für alle endlichen Punkte der Ebene eindeutig und regulär ist, außerdem noch dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb *Eins* bleibt. Diese Umkehrungsfunktion müßte sich demnach auf eine Konstante reduzieren.

Ein weiterer bemerkenswerter Fall ist der zuerst von Herrn *Poincaré**) betrachtete Fall, in welchem die abzubildende Fläche mindestens drei voneinander verschiedene Punkte der Ebene, etwa $0, 1, \infty$, von allen ihren Blättern unbedeckt läßt. Betrachtet man dann mit *Poincaré* die in $0, 1, \infty$ verzweigte elliptische Modulfunktion als Funktion des Ortes auf der abzubildenden Fläche B, so wird dieselbe auf B unverzweigt und folglich, weil B einfach zusammenhängend ist, auf B eindeutig sein. Durch die Modulfunktion wird demnach die Fläche B umkehrbar eindeutig konform auf eine andere ebenfalls einfach zusammenhängende Fläche abgebildet, welche die ganze untere Halbebene unbedeckt läßt. Damit sind wir auf den unmittelbar vorher betrachteten Fall geführt.

Schließlich sei noch verwiesen auf die weiter unten S. 284 ff. ausgeführte Untersuchung über die Alternative des euklidischen und nichteuklidischen Falles bei Zugrundelegung geschlossener *Riemann*scher Flächen F, d. i. *Riemann*scher Flächen für algebraische Funktionen $y(x)$.

Fassen wir jetzt den Fall einer *zweifach zusammenhängenden Fläche F* ins Auge. In diesem Falle wird Φ relativ zu F unendlich-vielblättrig. Um

*) Bull. de la Soc. math. de France, t. XI, 1883.

ein Urteil zu gewinnen, wann Φ auf die ganze Ebene, wann auf die Kreisfläche abbildbar ist, denken wir uns den Bereich F zunächst auf Grund unseres allgemeinen Abbildungsprinzips auf einen schlichten zweifach zusammenhängenden Bereich abgebildet. Diesen zweifach zusammenhängenden Bereich bilden wir dann konform auf die Fläche eines Kreisrings ab. Man hat zu unterscheiden den Fall, in welchem beide Kreise Punkte sind, von dem anderen Falle, in welchem von den beiden Begrenzungskreisen sich höchstens einer auf einen Punkt reduziert. Man erkennt nämlich sofort, indem man sich nunmehr die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ relativ zum Ring gebildet denkt, daß die konforme Abbildung dieser Fläche auf eine einblättrige Fläche in allen Fällen durch die Funktion Logarithmus vermittelt wird. Die ganze Ebene ergibt sich dabei dann und nur dann, wenn beide Begrenzungskreise des Ringes sich auf einen Punkt reduzieren.

Hat z. B. die Fläche B ein Begrenzungsstück, über welches hinaus dieselbe um ein zweidimensionales Flächenstück erweitert werden kann, so liegt sicher der nichteuklidische Fall vor; vgl. S. 280 unten.

Ist der Zusammenhang der Fläche F größer als 2, so liegt unter allen Umständen der nichteuklidische Fall vor.

Zum Beweise nehmen wir erstens den Fall an, daß F schlichtartig ist. Dann bilden wir F auf einen schlichten Bereich G ab und haben mindestens drei unbedeckte Punkte der Ebene. Bilden wir nun die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ_G des Bereichs G, so ist dieselbe im Sinne der konformen Abbildung mit der zu F gehörenden Fläche Φ äquivalent. Nun ist Φ_G nach dem *Poincaré*schen Kriterium (S. 281) in der Tat auf den Einheitskreis abbildbar; also gilt dasselbe für Φ.

Haben wir den Fall, daß die Fläche F nicht schlichtartig ist, so machen wir sie erst durch Rückkehrschnitte schlichtartig (wie in § 2 des ersten Teiles) und bilden die a. a. O. konstruierte noch nicht einfach zusammenhängende schlichtartige Überlagerungsfläche, welche jedenfalls unendlich-vielfach zusammenhängend ist. Denken wir uns dieselbe auf Grund unseres allgemeinen Abbildungsprinzips auf einen schlichten Bereich konform abgebildet, so kann man wieder drei verschiedene Punkte wählen, welche von diesem Bereiche nicht bedeckt werden und daher auch nicht von der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche dieses Bereiches.

Die Frage der Alternative läßt sich für t' analog behandeln.

Ist F einfach zusammenhängend und nur ein relativer Windungspunkt endlicher oder unendlich hoher Ordnung gegeben, so fällt die Entscheidung *für die Fläche Φ' in demselben Sinne aus wie für die Fläche Φ.*

Sind *zwei relative Windungspunkte* auf F gegeben, so tritt, falls die zugeordneten Verzweigungszahlen nicht beide gleich 2 sind, der *nichteuklidische Fall* ein, sonst der *euklidische oder nichteuklidische* Fall, jenachdem für $\Phi \equiv F$ der euklidische oder nichteuklidische Fall eintritt. Sind *drei oder mehr Windungspunkte* auf F gegeben, so tritt *stets der nichteuklidische Fall* ein. Zum Beweise denke man sich F in eine schlichte Kreisfläche bzw. in die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes verwandelt und dabei zugleich Φ' mittransformiert. Sind nun a und b zwei der relativen Windungspunkte der transformierten Fläche Φ', n_1 und n_2 die zugehörenden Verzweigungszahlen, so vermittelt die zu a, b, ∞ gehörende *Schwarz*sche Dreiecksfunktion mit den Verzweigungszahlen n_1, n_2, ∞ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der transformierten Fläche Φ' auf eine Fläche, welche außer in dem oben bezeichneten Ausnahmefalle ein zweidimensionales Stück der Ebene unbedeckt läßt.

Nach denselben Prinzipien (Abbildung von F auf schlichten Kreisring und Anwendung der *Schwarz*schen s-Funktion) findet man: *Ist F zweifach zusammenhängend, so tritt stets der nichteuklidische Fall ein.* —

Ist F dreifach zusammenhängend oder von noch höherem Zusammenhange, so ist die oben für die zu F gehörende Fläche Φ benutzte Hilfsabbildung auch für die Fläche Φ' brauchbar. *Es tritt also immer der nichteuklidische Fall ein.*

Bemerkung: Die vorstehende Diskussion gründete sich wesentlich auf allgemeine *Prinzipien der konformen Abbildung.* Man kann jedoch zu denselben Resultaten auch durch eine einfache *gruppentheoretische Überlegung* gelangen. Zu diesem Zwecke hat man die S. 278 ff. besprochene Struktur der zugleich mit t bzw. t' definierten Gruppe mit der Struktur der vollständig bekannten*) diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der euklidischen Ebene zu vergleichen.

*) Bezüglich dieser Gruppen verweise ich auf „*Fricke-Klein*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktion“ Bd. I, S. 222 ff. sowie auf meine Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I.“ Math. Ann. Bd. 67, 1909, S. 164 ff.

§ 6. *Der Fall der algebraischen Kurven: Aufbau der Überlagerungsfläche; die Alternative des euklidischen und nichteuklidischen Falles.*

Die in § 1 gestellten Probleme wurden zunächst unter der Voraussetzung behandelt, daß wir es mit nicht geschlossenen *Riemann*schen Flächen F zu tun haben oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die zugrunde liegende analytische Funktion $y(x)$ eine transzendente analytische Funktion ist. Der Fall der algebraischen Kurven ist von mir in der mehrfach erwähnten Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." selbständig behandelt worden, wobei das zugrunde liegende Abbildungstheorem über einfach zusammenhängende *Riemann*sche Flächen ebenfalls auf einem wesentlich anderen Wege bewiesen ist. (S. das Referat in § 14 des ersten Teiles.)

Indem wir die Probleme A, B, C, D, E, wie sie oben für den Fall analytischer Kurven gestellt worden sind, der Reihe nach durchgehen, haben wir zunächst die Frage nach der Konstruktion der Überlagerungsflächen Φ, Φ', Φ_s, Φ_s', Φ_s'' zu beantworten.

Hier ist zunächst zu sagen, daß die Konstruktion der Flächen Φ_s, Φ_s', Φ_s'' bzw. der halben einfach zusammenhängenden Flächen $\Phi_{s,1}$, $\Phi_{s,1}'$, $\Phi_{s,1}''$ *) gar keine Schwierigkeit darbietet, da die zugrunde liegende *Riemann*sche Fläche F_s im vorliegenden Falle endlich-vielfach zusammenhängend ist und die Anzahl der relativen Windungspunkte ebenfalls endlich ist. Die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche wird also erhalten, wenn man diese endlich-vielfach zusammenhängenden Flächen so aufschneidet, wie wir oben S. 272 die Näherungsfläche F_1 zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten haben, nämlich mit Benutzung von Querschnitten erster und zweiter Art, zu denen bei Φ_s' und Φ_s'' noch Einschnitte hinzutreten.

Um auch die Überlagerungsflächen Φ und Φ' zu finden, können wir die oben in § 3 geschilderte Methode direkt nicht mehr anwenden, weil die Fläche F jetzt geschlossen ist. Wir können jedoch mittelbar von

*) Bezüglich der Konstruktion dieser Flächen verweise ich auch auf S. 201 ff. meiner Abhandlung in den Math. Ann., Bd. 67. In dieser Abhandlung habe ich auch S. 194 ff. die Flächen Φ und Φ' nach einer von der in vorliegender Abhandlung entwickelten wesentlich verschiedenen Methode konstruiert. Die in vorliegender Abhandlung dargelegte Methode nimmt ihre Orientierung an einer von mir 1907 in den Gött. Nachr. veröffentlichten Note „Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven".

dieser Methode Gebrauch machen, indem wir *Hilfsüberlagerungsflächen* bilden, welche noch nicht einfach zusammenhängend sind. Als Grundlage dient uns dabei folgendes Theorem, welches auch für die geschlossenen *Riemann*schen Flächen gilt:

Satz: Es sei F irgend eine Riemannsche Fläche. Auf derselben seien relative Windungspunkte mit den zugeordneten Windungszahlen markiert in endlicher oder unendlich großer Zahl, wobei kein innerer Häufungspunkt dieser relativen Windungspunkte existieren möge. Es sei $\bar{F}$ eine der Fläche F übergelagerte Fläche, welche, sofern sie überhaupt relative Windungspunkte besitzt, nur in den markierten singulären Punkten relative Windungspunkte hat, deren Windungszahlen entweder gleich den gegebenen Windungszahlen sind oder aber genaue Teile derselben. Bildet man dann einerseits die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ der Fläche F mit den betreffenden gegebenen relativen Windungspunkten, andererseits die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Fläche Φ der Fläche $\bar{F}$ mit denselben) relativen Windungspunkten, wobei jedoch für jeden relativen Windungspunkt (relativ zu $\bar{F}$) die relative Windungszahl gleich dem Quotienten der ursprünglich gegebenen Windungszahl durch die relative Windungszahl von Φ relativ zu F ist, so ist die Fläche $\bar{\Phi}$ mit der Fläche Φ identisch.*

Der Beweis ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß, wenn man irgend zwei relativ zu F koinzidierende Punkte der Flächen Φ und $\bar{\Phi}$ einander zugeordnet denkt, diese Zuordnung sich über die ganzen Flächen Φ und $\bar{\Phi}$ hin fortsetzen läßt und sich als eine relativ unverzweigte, daher wegen des einfachen Zusammenhanges umkehrbar eindeutige Punktzuordnung der genannten Fläche darstellt.

Von diesem Satze machen wir nun in folgender Weise Gebrauch zur Konstruktion der Flächen Φ und Φ' über einer *geschlossenen* Fläche F.

Für $p=0$ ist die Fläche Φ mit F identisch. Für $p=1$ bekommen wir Φ, indem wir zunächst die Fläche F durch einen Rückkehrschnitt in eine *schlichtartige***) Fläche F' verwandeln und von dieser, wie auf S. 203 des ersten Teiles, zu einer schlichtartigen Überlagerungsfläche $\bar{F}$ übergehen,

---

*) Das soll heißen: Wenn a einer der auf F markierten Punkte ist, so sind auf $\bar{F}$ alle über a befindlichen Punkte zu markieren und mit der im Texte angegebenen Windungszahl zu versehen.

**) D. i. eine durch jeden inneren Rückkehrschnitt zerfallende.

welche im vorliegenden Falle zweifach zusammenhängend ist. Von dieser zweifach zusammenhängenden Fläche gehen wir nun durch einen neuen Überlagerungsprozeß, nämlich durch periodische Überdeckung zur gesuchten Fläche Φ über, welche durch das elliptische Integral erster Art auf die euklidische Ebene abgebildet wird.

Nehmen wir den Fall $p \geqq 2$, so verwandeln wir F durch p getrennte Rückkehrschnitte in eine schlichtartige Fläche F', bilden dann mittels des in § 2 des ersten Teiles geschilderten Prozesses die schlichtartige Überlagerungsfläche $\bar{F}$, welche unendlich-vielfach zusammenhängend und ungeschlossen ist. Auf diese können wir nunmehr unsern oben S. 271 ff. erläuterten allgemeinen Überlagerungsprozeß zur Bildung der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ anwenden, wobei jetzt lediglich Querschnitte zweiter Art benötigt werden, da $\bar{F}$ schlichtartig ist.

Was die Bildung der Fläche Φ' anbetrifft, so erledigen sich die Fälle $p > 1$ mittels derselben Hilfsfläche $\bar{F}$.

Ist jedoch $p = 0$, so verfahren wir in anderer Weise. Der leitende Gedanke muß dabei wieder sein, zu einer *ungeschlossenen* Überlagerungsfläche zu gelangen, deren relative Windungspunkte als Windungszahlen Teile der gegebenen Windungszahlen haben.

Zunächst schließen wir die bekannten *Schwarz*schen*) Dreiecksfälle, in welchen die konforme Abbildung auf eine Vollkugel stattfindet, aus. Es sind dies folgende Fälle, in welchen die Anzahl der gegebenen Windungspunkte gleich drei ist und die Windungszahlen folgendermaßen zu nehmen sind: $2, 2, n$ $(n \geqq 2)$; $2, 3, 3$; $2, 3, 4$; $2, 3, 5$.

Die betreffenden Kreisbogendreiecke haben, wenn allgemein mit n_1, n_2, n_3 die drei Windungszahlen bezeichnet werden, die Winkel $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$, deren Summe größer als π ist. In dem Falle, in welchem die Summe gleich π ist, ergeben sich euklidische Dreiecke und es wird die konforme Abbildung der in diesem Falle unendlichviel-blättrig ausfallenden einfach zusammenhängenden Fläche Φ' durch ein elliptisches Integral vermittelt. Sind die Windungszahlen so gegeben, daß die Winkelsumme kleiner als π wird, so erhalten wir den nichteuklidischen Fall, indem die Reproduktionen

*) *H. A. Schwarz*: „Über diejenigen Fälle, in welchen die *Gauß*ische hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes ist". Dieses Journal, Bd. 75, S. 292 ff. = Ges. Abh. Bd. II.

eines solchen Kreisbogendreiecks die Fläche des in diesem Falle vorhandenen gemeinschaftlichen Orthogonalkreises lückenlos bedecken. Die konforme Abbildung geschieht durch die *Schwarz*sche s-Funktion. Das uns unmittelbar zugängliche Bild der nebeneinander gelagerten Dreiecke gibt uns auch eine unmittelbare Anschauung der Art und Weise, wie die Fläche Φ' in den genannten Fällen zu bilden ist. Zu diesen Fällen nehmen wir noch den Fall von vier singulären Punkten mit den zugehörenden Windungszahlen $2, 2, 2, 2$ hinzu, welche auf das elliptische Integral erster Art führt. Die zugehörende Überlagerungsfläche kann ebenfalls als eine uns bekannte Fläche gelten.

Nehmen wir nun bei $p=0$ die Zahl m der relativen Windungspunkte größer als drei an.

Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem sich unter den Windungszahlen drei solche n_1, n_2, n_3 befinden, für welche die Summe $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\leqq 1$ ist. Wir bilden dann über F die zu diesen drei Windungspunkten mit den betreffenden Windungszahlen gehörende *ungeschlossene* Überlagerungsfläche $\overline{F}$, welche unendlich-vielblättrig ist. Auf der Fläche $\overline{F}$ haben wir nun in allen relativen Blättern die noch nicht berücksichtigten singulären Punkte mit den betreffenden Windungszahlen zu markieren und über $\overline{F}$ die entsprechende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ' zu bilden, was nach S. 275 geschehen kann, da die Fläche $\overline{F}$ ungeschlossen ist.

Ist jetzt für je drei der gegebenen singulären Punkte auf $F(p=0)$ die obige Summe *größer als Eins*, so verfahren wir folgendermaßen: wir nehmen irgend drei der Punkte heraus und konstruieren zu diesen drei Punkten die zugehörige endlich-vielblättrige geschlossene Überlagerungsfläche $\overline{F}$, die ihrerseits vom Geschlecht null ist. Die Anzahl der relativen Blätter (Blätter relativ zu F) dieser Fläche ist stets größer als vier. Wir haben nun auf der Fläche $\overline{F}$ die noch zu berücksichtigenden Windungspunkte in allen Blättern zu markieren. Alsdann ergeben sich auf $\overline{F}$ mindestens vier voneinander verschiedene Stellen mit gleicher Windungszahl. Wir haben also wieder den Fall $p=0$, $m\geqq 4$ und können nun, wenn jetzt viermal die Windungszahl 2 vorkommt, über $\overline{F}$ eine neue *ungeschlossene* Überlagerungsfläche $\overline{\overline{F}}$ bauen, nämlich die Fläche des *Abel*schen Integrales erster

Art. Kommt aber die 2 nicht viermal vor, so kommt eine Zahl n, welche größer als zwei ist, viermal vor. Wir wählen drei dieser Punkte und bilden relativ zu $\overline{F}$ die durch diese drei Punkte bestimmte Überlagerungsfläche $\overline{\overline{F}}$, welche nun unendlich-vielblättrig, also auch *ungeschlossen* ist und auf welcher unendlich viele Punkte mit einer Verzweigungszahl zu versehen sind. Zur Bildung der gesuchten Fläche Φ' können wir jetzt direkt die oben § 3 entwickelte Methode anwenden.

Das Wesentliche, was durch die soeben geschilderte Methode zur Bildung der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ bzw. Φ' über einer geschlossenen Fläche F erreicht wird, ist dieses, daß uns diese Methode auch unmittelbar Aufschluß gibt über die Frage der Entscheidung der *Alternative zwischen euklidischem und nichteuklidischem Fall.* Wir haben nämlich, abgesehen von den einfachsten Fällen, in welchen die Funktion $t(x,y)$ bzw. $t'(x,y)$ entweder elementar oder ein elliptisches Integral erster Art oder eine *Schwarz*sche s-Funktion ist und in welchen wir daher die Entscheidung über die Alternative als etwas uns bereits Bekanntes betrachten durften, die Fläche Φ bzw. Φ' aufgefaßt als Überlagerungsfläche einer schlichtartigen unendlich-vielblättrigen Hilfsfläche, welche im Falle der Fläche Φ ($p \geqq 2$) unendlich hohen Zusammenhang hat, im Falle der Fläche Φ' ($p \geqq 0$) unendlich viele als relative Windungspunkte markierte Punkte enthält. Für diese Flächen tritt daher auf Grund der Untersuchung S. 280 ff. stets der nichteuklidische Fall ein. Hiermit ist das oben in der Einleitung erwähnte *Klein-Poincaré*sche *Grenzkreistheorem* vollständig bewiesen. In der Tat sind die von uns mit $t(x,y)$ und $t'(x,y)$ bezeichneten Transzendenten für algebraische Kurven (x,y) wesentlich dieselben Größen, deren Existenz das erwähnte *Klein-Poincaré*sche Theorem behauptet. Die Existenz wesentlich der von uns mit $t_s(x,y)$ und $t_s'(x,y)$ bezeichneten Transzendenten ist für den Fall einer orthosymmetrischen algebraischen *Riemann*schen Fläche zuerst von *Fricke* behauptet worden („Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen Bd. II, S. 46 oben).

Was die Existenz der Größen t_s, t_s', t_s'' anbetrifft, so ergibt sich dieselbe genau ebenso wie oben S. 279 im Falle reeller transzendenter Kurven. Es ist jedoch im Gegensatz zu den transzendenten Kurven folgender Satz noch besonders zu vermerken:

Die Größen t_s, t_s', t_s'' sind durch ihre oben S. 256—257 angegebenen

*Uniformisierungseigenschaften im Falle der algebraischen Kurven bereits bis auf eine reelle lineare Substitution bestimmt**).

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe derselben Methoden, nach welchen ich in der Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II." in § 20 bzw. 6—10 dartun konnte, daß die a. a. O. untersuchten Transzendenten lediglich durch ihre Uniformisierungseigenschaften charakterisiert werden können. Man beachte dazu folgendes. Bei der Bildung der Überlagerungsflächen $\Phi_{s,1}, \Phi'_{s,1}, \Phi''_{s,1}$ hat man im vorliegenden Falle nicht nötig, die betreffende zugrunde liegende Fläche $[F_s]$ bzw. $\{F_s\}$ erst durch Näherungsflächen auszuschöpfen, wie wir dies im allgemeinen Falle behufs Bildung der Fläche Φ bzw. Φ' aus F taten. Vielmehr wird man direkt $[F_s]$ bzw. $\{F_s\}$ durch Querschnitte und eventuell Einschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln und den Überlagerungsprozeß anwenden, wobei wir uns die genannten einfach zusammenhängenden Flächenstücke in unendlich vielen Exemplaren vorhanden zu denken haben. Das durch die Funktion t_s bzw. t'_s bzw. t''_s entworfene Bild des bezüglichen einfach zusammenhängenden Flächenstücks wird ein an die Achse des Reellen mit mehreren Begrenzungsteilen anstoßender Bereich, welcher bei Hinzunahme seines Spiegelbildes in bezug auf die Achse des Reellen einen mehrfach zusammenhängenden Bereich mit linear bezogenen Rändern liefert vom Typus der in der genannten Abhandlung in den Math. Ann., Bd. 69 von mir betrachteten Fundamentalbereiche. Der a. a. O. in den genannten Paragraphen geführte Beweis läßt sich dabei im vorliegenden Falle noch auf Grund der Bemerkung vereinfachen, daß jetzt nicht erst die Summe der *Quadrate* der Umfänge, sondern bereits die Summe der Umfänge selbst aus bekannten Gründen konvergiert. Man kommt daher auch ohne den a. a. O. § 20 benutzten *Verzerrungssatz* aus.

§ 7. *Beziehung der zentralen Uniformisierungsprobleme zu den diskontinuierlichen nichteuklidischen Bewegungsgruppen.*

Indem wir von einer Fläche F bzw. F_s ausgingen und die zugehörenden Funktionen t, t', t_s, t'_s, t''_s konstruierten, sind wir in jedem ein-

*) Vgl. meine Note „Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven". Gött. Nachr. 1907. Es ist also nicht erst eine Normierung erforderlich; die Größe ist vielmehr von selbst normiert.

zelnen Falle zu einer bestimmten eigentlich diskontinuierlichen Gruppe gelangt, welche gemäß einer von Herrn *Klein* und Herrn *Poincaré* eingeführten Interpretation als diskontinuierliche Bewegungsgruppe der absoluten Ebene (*Riemann*sche, euklidische, im allgemeinen *Bolyai-Lobatschefsky*sche Ebene) aufgefaßt werden können. Es gilt auch umgekehrt der Satz, daß auf die erwähnte Weise überhaupt *alle diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie* erhalten werden und zwar *sowohl die mit endlich vielen als auch die mit unendlich vielen Gruppenerzeugenden.*

Um den vorstehend behaupteten Satz einzusehen, gehe man von einer solchen Gruppe aus, indem man sich dieselbe gegeben denkt. Ist diese Gruppe eine Bewegungsgruppe der *Riemann*schen Ebene, so ist sie stets *endlich.* Sind dann $\psi_0(t')=t'$, $\psi_1(t')$, $\psi_2(t')$, $\dots$ $\psi_{m-1}(t')$ die in dieser Gruppe enthaltenen linearen Substitutionen und ist t_0' ein t'-Wert, dessen sämtliche m äquivalente Werte untereinander verschieden sind, so ist

$$x(t')=\sum_{a=0}^{m-1}\frac{1}{\psi_a(t')-t_0'}$$

eine Funktion von t', welche bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt und jeden Wert genau m-mal annimmt. Durch Vermittelung der Funktion $x(t')$ wird die schlichte t'-Ebene umkehrbar eindeutig konform auf eine geschlossene einfach zusammenhängende *Riemann*sche Fläche Φ mit m Blättern abgebildet. Die Fläche Φ ist, da die zu einem bestimmten x-Werte gehörenden m t'-Werte durch die linearen Substitutionen $\psi_0,\dots\psi_{m-1}$ verbunden sind, *relativ regulär* über der schlichten x-Ebene ausgebreitet, die wir jetzt zweckmäßig mit F bezeichnen würden. Die Funktion $t'(x)$ liefert uns nun in der Tat eine Uniformisierung der geschlossenen *Riemann*schen Fläche F, für welche $p=0$ ist, und zwar eine Uniformisierung mit relativen Windungspunkten. Insbesondere handelt es sich hier, da Φ endlich-vielblättrig ist, um diejenigen Uniformisierungen der Fläche $p=0$, welche durch die *Schwarz*schen Vollkugelfälle*) der hypergeometrischen Reihe geliefert werden. (S. 162 ff. meiner Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I." in den Math. Ann. Bd. 67, 1909.) Bezüglich der Entstehung aller diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der euklidischen Ebene durch spezielle zu $p=0$ und $p=1$ gehörende Uniformisierungs-

*) Abhandlung über die hypergeometrische Reihe.

transzendenten sei ebenfalls auf die erwähnte Abhandlung (Abschnitt C) hingewiesen.

Betrachten wir nunmehr den allgemeinen Fall, in welchem die zu untersuchende gegebene diskontinuierliche Gruppe aus lauter reellen Substitutionen besteht. Damit eine solche Gruppe diskontinuierlich ist, ist bekanntlich notwendig und hinreichend das Nichtvorkommen von infinitesimalen Substitutionen. Es sind jetzt zwei charakteristisch unterschiedene Fälle zu betrachten. Die Gruppe kann nämlich entweder auf der Achse des Reellen diskontinuierlich sein oder nicht. Im ersten Falle wird das vollständige Gebiet, für welches die Gruppe diskontinuierlich ist, von der ganzen Ebene mit Ausschluß von unendlich vielen diskreten Punkten auf der Achse des Reellen gebildet, im zweiten Falle von der oberen und unteren Halbebene einzeln, ohne daß zwischen diesen beiden Halbebenen ein Übergang über die Achse des Reellen hinweg besteht.

Betrachten wir zunächst den zweiten Fall. Indem wir die Gesamtheit aller vermöge der Substitutionen der Gruppe äquivalenten Punkte der oberen Halbebene als einen einzigen idealen Punkt auffassen, gewinnen wir, indem wir uns diesen Punkt variabel vorstellen, die Vorstellung einer nur aus inneren Punkten bestehenden Mannigfaltigkeit R. M., welche wir in Erweiterung einer von Herrn *Klein**) für geschlossene Mannigfaltigkeiten entwickelten Auffassung als eine „*Riemannsche Mannigfaltigkeit*“ bezeichnen wollen. Auf die Mannigfaltigkeit R. M. können wir, da die Umgebung jedes Punktes dieser Mannigfaltigkeit offenbar konform auf eine gewöhnliche Kreisfläche abgebildet werden kann, die im ersten Teile unserer Abhandlung dargelegte Methode des Existenzbeweises für die a. a. O. mit U bezeichnete Potentialfunktion anwenden. Wir können also in der Ebene unserer Gruppe zwei Potentialfunktionen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ finden, welche bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben und von welchen jede nur an einer Stelle und den äquivalenten unstetig wird wie die Funktion U, d. i. wie $r^{-1}\cos\varphi$. Bezeichnen wir mit $V^{(1)}$ und $V^{(2)}$ die zu $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ gehörenden konjugierten Potentialfunktionen, so ist der Quotient

$$(*) \qquad \frac{d(U^{(1)}+iV^{(1)})}{d(U^{(2)}+iV^{(2)})}$$

*) Math. Ann. Bd. XXI, 1883 in der Abhandlung „Neue Beiträge zur *Riemann*schen Funktionentheorie.“

eine eindeutige analytische Funktion, welche bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt und in der ganzen oberen Halbebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt*). Durch Vermittelung dieser Funktion wird die obere Halbebene konform auf eine *Riemann*sche Fläche F abgebildet, wobei jedem vollständigen System von untereinander äquivalenten Punkten der Halbebene umkehrbar eindeutig ein Punkt der Fläche F zugeordnet ist. Die Umkehrungsfunktion der betrachteten Abbildungsfunktion ist eine auf der Fläche F erklärte unendlich vieldeutige Funktion, deren relative Zweige durch die Substitutionen der gegebenen Gruppe ineinander übergehen. Diese Umkehrungsfunktion ist nun in der Tat, wie man jetzt sofort bemerkt, entweder die zu F gehörende in § 4 konstruierte Funktion t oder eine der dort konstruierten Funktionen t'. Q. e. d.

Im ersten Falle, in welchem die gegebene Gruppe auch auf der Achse des Reellen diskontinuierlich ist, entspricht die zu betrachtende *Riemann*sche Mannigfaltigkeit R. M. der ganzen Ebene mit Ausschluß nur der Grenzstellen auf der Achse des Reellen. Wir nehmen jetzt zu der S. 291 konstruierten Funktion (*) die konjugierte Funktion des konjugierten Arguments hinzu. Die Summe der beiden Funktionen ist dann eine für reelle Werte des Arguments reelle Funktion, durch deren Vermittelung eine konforme Abbildung der Ebene der Gruppe auf eine symmetrische *Riemann*sche Fläche F_s ausgeführt wird, wobei zu äquivalenten Punkten der Ebene stets ein und derselbe Punkt der Fläche F_s gehört, während zu nichtäquivalenten Punkten der Ebene stets verschiedene Punkte auf F_s gehören. Denjenigen Stücken der Achse des Reellen, auf welchen sich die Gruppe diskontinuierlich verhält, entsprechen die Realitätszüge auf F_s. Man erkennt wiederum leicht, daß die Umkehrungsfunktion der erwähnten Abbildungsfunktion entweder die zu F_s gehörende Funktion t_s oder eine Funktion t_s' oder t_s'' ist. Q. e. d.**)

*) Eine solche Funktion hätten wir natürlich auch mittels *Poincaré*scher Θ-Reihen bilden können.

**) Dem vorliegenden „zweiten Teil“ beabsichtige ich demnächst noch einen „dritten Teil“ folgen zu lassen.

Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren.

Von Herrn *R. Remak* in Berlin.

Das Produkt zweier Untergruppen einer endlichen Gruppe wird dann ein *direktes Produkt* genannt, wenn jedes Element der einen Gruppe mit jedem Elemente der anderen Gruppe vertauschbar ist und die beiden Gruppen teilerfremd sind, d. h. außer dem Einheitselemente E kein Element gemeinsam haben. Das Zeichen der direkten Multiplikation sei $\times$. Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

so heiße $\mathfrak{A}$ sowohl wie $\mathfrak{B}$ *ein* direkter Faktor von $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen *komplementäre* direkte Faktoren heißen. Eine Gruppe heiße *direkt unzerlegbar*, wenn sie nicht als das direkte Produkt zweier von E verschiedener Faktoren dargestellt werden kann. Der Zweck dieser Arbeit ist es, zu zeigen, daß die Zerlegung einer endlichen Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren isomorph eindeutig ist. Und zwar handelt es sich um Isomorphismen einer besonderen Art.

Unter *Isomorphismus* schlechthin soll hier immer der eindeutige Isomorphismus verstanden werden, der ein Element der einen Gruppe einem und nur einem Elemente der anderen Gruppe zuordnet. Der Isomorphismus zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{H}$ heiße dann ein *zentraler Isomorphismus* in $\mathfrak{H}$, wenn der Quotient je zweier einander zugeordneter Elemente ein invariantes Element von $\mathfrak{H}$ ist oder dem Zentrum $\mathfrak{H}_i$ von $\mathfrak{H}$ angehört. Ich will auch sagen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien einander *zentral isomorph*. Ebenso heiße ein zentraler Isomorphismus von $\mathfrak{H}$ mit sich selber ein *zentraler Automorphismus* von $\mathfrak{H}$. Das Zeichen $\sim$ bedeute den gewöhnlichen, das Zeichen $\underline{\sim}$ den zentralen Isomorphismus zwischen Gruppen. Der zu beweisende Hauptsatz läßt sich schärfer folgendermaßen formulieren:

Ist eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt, so gibt es einen zentralen Automorphismus von $\mathfrak{H}$, der jedem Faktor der einen Zerlegung einen und nur einen Faktor der anderen Zerlegung zuordnet.

Dieser Automorphismus ist sicher ein äußerer, da ein innerer Automorphismus jeden direkten Faktor von $\mathfrak{H}$ in sich selber überführt.

Der Satz ist bereits bewiesen für die kommutativen Gruppen und zwar in einer Arbeit der Herren *Frobenius* und *Stickelberger*: „Über Gruppen vertauschbarer Elemente“*).

Es wird scharf zu unterscheiden sein zwischen isomorpher und identischer Eindeutigkeit der Zerlegung. Denn gewisse spezielle Gruppen zerfallen derart in direkt unzerlegbare Faktoren, daß die Faktoren einer Zerlegung, von der Reihenfolge abgesehen, mit den Faktoren einer anderen Zerlegung nicht nur isomorph, sondern identisch übereinstimmen.

Es soll § 1 dieser Arbeit eine Reihe vorbereitender Sätze, § 2 den Beweis des Hauptsatzes, § 3 zwei Sätze über den Ersatz einzelner Faktoren eines direkten Produktes durch zentral isomorphe bringen.

§ 1.

Die folgenden Eigenschaften der direkten Produkte mögen ohne Beweis angeführt werden.

Das direkte Produkt zweier Gruppen ist eine Gruppe.

Es gilt außer dem kommutativen das assoziative Gesetz der direkten Multiplikation:

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise, daß man die Faktoren eines direkten Produktes beliebig vieler Faktoren in beliebiger Reihenfolge schreiben und beliebig zusammenfassen darf. Man darf also in jedem direkten Produkte die Klammern weglassen. Das läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

Enthalten zwei Teilprodukte eines direkten Produktes beliebige, aber verschiedene Faktoren, so sind sie teilerfremd.

Ist ein Element eines direkten Produktes dargestellt als Produkt von Elementen der Faktoren, so mögen die benutzten Elemente der Faktoren die *Komponenten* des Elementes des Produktes heißen. Die Komponenten des Produktes zweier Elemente eines direkten Produktes erhält

*) Dieses Journal, Bd. 86, S. 217.

man, indem man die aus demselben Faktor stammenden Komponenten der beiden Elemente in der richtigen Reihenfolge miteinander multipliziert.

Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'' \times \cdots,$$

so kann eine Gleichung

$$E = A \cdot A' \cdot A'' \cdots$$

nur bestehen, wenn

$$A = E;\ A' = E;\ A'' = E; \ldots .$$

Hieraus folgt:

Jedes Element eines direkten Produktes ist eindeutig durch Komponenten darstellbar.

Ich will deshalb fortan das Multiplikationszeichen $\times$ auch zwischen den Komponenten eines Elementes verwenden, um damit anzudeuten, daß ein Element H von $\mathfrak{H}$ in seine eindeutigen Komponenten zerlegt ist:

$$H = A \times A' \times A'' \times \cdots .$$

Es muß dabei stets angegeben werden, auf welche Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in direkte Faktoren sich die Zerlegung von H in Komponenten bezieht. Ich will daher auch sagen, das Element H von $\mathfrak{H}$ sei nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'' \times \cdots$$

in Komponenten zerlegt.

Es heiße A die $\mathfrak{A}$-Komponente, A' die $\mathfrak{A}'$-Komponente von H, usw. Alle $\mathfrak{A}$-Komponenten der Elemente einer Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{H}$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die die $\mathfrak{A}$-Komponente von $\mathfrak{C}$ heiße.

Satz 1. Sind zwei Elemente eines direkten Produktes miteinander vertauschbar, so ist jede Komponente des einen Elementes mit jeder Komponente des anderen Elementes vertauschbar.

Die aus verschiedenen Faktoren stammenden Komponenten sind der Definition nach miteinander vertauschbar. Wenn ferner

$$H_1 H_2 = H_2 H_1,$$

so gilt auch für die $\mathfrak{A}$-Komponenten dieser Elemente:

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 .$$

Daher ist auch H_1 mit allen Komponenten von H_2 vertauschbar. Die Komponenten eines invarianten Elementes eines direkten Produktes sind also mit allen Elementen des Produktes vertauschbar, d. h. sie sind selbst invariante Elemente. Da umgekehrt die invarianten Elemente der Faktoren auch invariante Elemente des Produktes sind, so folgt:

Das Zentrum eines direkten Produktes ist das direkte Produkt der Zentren der Faktoren.

Wenn

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}'\times\mathfrak{A}''\times\cdots,$$

so ist

$$\mathfrak{H}_i=\mathfrak{A}_i\times\mathfrak{A}_i'\times\mathfrak{A}_i''\times\cdots.$$

Es bedeute

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$$

den größten gemeinsamen Teiler der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{H}>\mathfrak{C}$$

bedeute: $\mathfrak{C}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$.

Satz 2. Es sei

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B},\ \mathfrak{H}>\mathfrak{C}>\mathfrak{A},$$

dann ist

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Es ist

$$\mathfrak{A}<\mathfrak{C}\ \text{und}\ (\mathfrak{B},\mathfrak{C})<\mathfrak{C},$$

also ist

$$\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C})<\mathfrak{C}.$$

Ferner sei

$$C=A\times B$$

die Zerlegung eines Elementes C von $\mathfrak{C}$ nach

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}.$$

Es sind C und A Elemente von $\mathfrak{C}$, also ist

$$A^{-1}\cdot C=B$$

ein Element von $\mathfrak{C}$, somit auch von $(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$. Also ist

$$\mathfrak{C}<\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Es war aber

$$\mathfrak{C}>\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}),$$

weshalb

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B},\mathfrak{C}).$$

Ebenfalls ohne Beweis mögen folgende Eigenschaften des zentralen Isomorphismus erwähnt werden.

Wenn

$$\mathfrak{A}\backsimeq\mathfrak{B}\ \text{und}\ \mathfrak{A}\backsimeq\mathfrak{C},\ \text{so ist}\ \mathfrak{B}\backsimeq\mathfrak{C}.$$

Aus

$$\mathfrak{A}\backsimeq\mathfrak{B}\ \text{folgt}\ \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i.$$

Sind die Faktoren zweier direkter Produkte paarweise einander isomorph, so zeigt man, daß die Produkte einander isomorph sind, indem man

aus zugeordneten Komponenten gebildete Elemente einander zuordnet. Der Isomorphismus der Produkte ist ein zentraler, wenn es der der Faktoren ist. Die Konstitution eines direkten Produktes ist durch die Konstitution seiner Faktoren vollständig bestimmt. Der Hauptsatz wird also bewiesen sein, wenn es gelingt, zu zeigen, daß die Faktoren zweier verschiedener Zerlegungen einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren paarweise einander zentral isomorph sind.

Satz 3. Verschiedene komplementäre direkte Faktoren desselben direkten Faktors einer Gruppe sind einander isomorph.

Wenn

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C},$$

so ist

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}.$$

Hierbei werden die $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *gemeinsamen Elemente sich selber zugeordnet.*

Wenn

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}_i,$$

so ist

$$\mathfrak{B} \underline{\sim} \mathfrak{C}.$$

Es sei

$$B_1 = A_1 \times C_1$$

die Zerlegung eines Elementes B_1 von $\mathfrak{B}$ in Komponenten nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}.$$

Man ordne C_1 und B_1 einander zu. Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig, da

$$C_1 = A_1^{-1} \times B_1$$

die Zerlegung von C_1 in Komponenten nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

ist. Ebenso sei

$$B_2 = A_2 \times C_2, \quad B_3 = A_3 \times C_3,$$

ferner

$$B_1 B_2 = B_3$$

oder

$$A_1 A_2 \times C_1 C_2 = A_3 \times C_3,$$

also

$$C_1 C_2 = C_3.$$

Die Produkte zugeordneter Elemente sind einander zugeordnet. Also ist

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}.$$

Es ist

$$B_1 C_1^{-1} = A_1.$$

Wenn

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}_i,$$

so ist

$$\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}.$$

Ist das Element B in $\mathfrak{B}$ und in $\mathfrak{C}$ enthalten, so ist

$$B = E \times B$$

seine Zerlegung sowohl nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

wie nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}.$$

Also wird B sich selber zugeordnet.

Aus der im Anfange erwähnten Arbeit der Herren *Frobenius* und *Stickelberger* werde ich die Existenz einer Basis der kommutativen Gruppen als bekannt voraussetzen*). Diese Ergebnisse mögen folgendermaßen ausgedrückt werden:

Unter den kommutativen Gruppen sind alle zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung und nur diese direkt unzerlegbar. Jede kommutative Gruppe kann also als direktes Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung dargestellt werden.

Dagegen werde ich die Eindeutigkeit der Invarianten der kommutativen Gruppen**) oder, was dasselbe bedeutet, die isomorphe Eindeutigkeit der Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren nicht als bekannt voraussetzen. Sie wird als spezieller Fall des Hauptsatzes dieser Arbeit mit bewiesen.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine zyklische Gruppe von der Primzahlpotenzordnung p^ν; die kleinste von E verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{C}$, deren Ordnung p ist, möge mit $\mathfrak{C}_p$ bezeichnet werden. Da $\mathfrak{C}_p$ in allen Untergruppen von $\mathfrak{C}$ enthalten ist, hat $\mathfrak{C}$ mit irgend einer Gruppe $\mathfrak{A}$ dann und nur dann einen Teiler gemeinsam, wenn

$$\mathfrak{C}_p < \mathfrak{A}.$$

§ 2.

Hauptsatz: Ist eine Gruppe auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt, so sind die Faktoren der beiden Zerlegungen paarweise einander zentral isomorph.

---

*) Siehe auch: *Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, (2. Aufl.) § 11, S. 38.

**) Siehe auch: a. a. O. § 12, S. 45.

Der Beweis wird durch Induktion geführt. Der Satz sei bereits bewiesen in allen Fällen, in denen die Ordnung der ganzen Gruppe $\mathfrak{H}$ kleiner ist als im vorliegenden Falle.

Die beiden Zerlegungen seien

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n,$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s.$$

Man setze

$$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m = \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{G},$$

dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Man hat zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Fall 1): Es enthalte eine der beiden Zerlegungen einen kommutativen direkten Faktor, z. B. sei $\mathfrak{R}_1$ zyklisch von der Primzahlpotenzordnung p^α. Es sei R ein Basiselement von $\mathfrak{R}_1$. Man zerlege R nach

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

in Komponenten:

$$R = A' \times B'.$$

Es ist

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}} \neq E,$$
$$R^{p^\alpha} = A'^{p^\alpha} \times B'^{p^\alpha} = E,$$

also

$$A'^{p^\alpha} = E,$$
$$B'^{p^\alpha} = E.$$

Die Ordnungen von A' und B' gehen in p^α auf. Eine der beiden Komponenten, z. B. A', muß die Ordnung p^α besitzen. Die Ordnung von B' sei p^β. Es sind zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\alpha = \beta$.

Unterfall 1): $\alpha > \beta$.

Es ist

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}},$$

da

$$B'^{p^{\alpha-1}} = E.$$

Bezeichnet man die Gruppe der Potenzen von A' mit $\mathfrak{A}'$, so ist

$$\mathfrak{R}_{1p} = \mathfrak{A}'_p.$$

Da $\mathfrak{R}_1$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd, so ist $\mathfrak{R}_{1p}$ nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten, also auch $\mathfrak{A}'_p$ nicht, also ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd. Die Elemente von $\mathfrak{R}_1$ sind invariante Elemente von $\mathfrak{H}$, also auch ihre Komponenten, die Elemente von $\mathfrak{A}'$. Daher ist das Produkt von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt.

Es ist

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G} = \mathfrak{H},$$

da beide Produkte von gleicher Ordnung sind.

Unterfall 2): $\alpha = \beta$.

Es sei $\mathfrak{B}'$ die Gruppe der Potenzen von B'. Man setze

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'.$$

Da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{H}' > \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G},$$

so ist nach Satz 2)

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}).$$

Setzt man $(\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}'$, so wird

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{G}'$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p^α ist. Es ist

$$R = A' \times B'$$

also

$$R^{p^{\alpha-1}} = A'^{p^{\alpha-1}} \times B'^{p^{\alpha-1}},$$

$$\mathfrak{R}_{1p} \neq \mathfrak{A}'_p.$$

Man zerlege A' nach

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'$$

in Komponenten:

$$A' = R^k \times G',$$

wo G' ein Element von $\mathfrak{G}'$. Es sei G' von der Ordnung p^β, wo $\beta \leqq \alpha$. Es ist

$$A'^{p^{\alpha-1}} = R^{k \cdot p^{\alpha-1}} \times G'^{p^{\alpha-1}}.$$

Wäre $\beta < \alpha$, so wäre

$$G'^{p^{\alpha-1}} = E,$$

also

$$A'^{p^{\alpha-1}} = R^{k \cdot p^{\alpha-1}}$$

oder

$$\mathfrak{A}'_p = \mathfrak{R}_{1p},$$

was nicht der Fall ist. Also ist $\beta = \alpha$. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ von der Ordnung p^α ist zyklisch, weil sie ein Element G' der Ordnung p^α enthält.

Da $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ teilerfremd, ist

$$\mathfrak{A}'_p \neq \mathfrak{B}'_p .$$

$\mathfrak{G}'_p$ kann also höchstens einer der beiden Gruppen $\mathfrak{A}'_p$ oder $\mathfrak{B}'_p$ gleich sein, ist daher von mindestens einer der beiden verschieden. Es sei z. B.

$$\mathfrak{A}'_p \neq \mathfrak{G}'_p .$$

Dann ist $\mathfrak{A}'_p$ nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten; denn sonst wäre

$$\mathfrak{A}'_p < \mathfrak{H}', \quad \mathfrak{A}'_p < \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{A}'_p < (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}',$$

also $\mathfrak{A}'_p = \mathfrak{G}'_p$, was nicht der Fall ist. Also ist $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{G}$ teilerfremd, also ist wie im ersten Unterfalle

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G} = \mathfrak{H}.$$

Für beide Unterfälle gemeinsam mache man folgende weiteren Schlüsse. Es ist

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{A}' \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G},$$

also nach Satz 2)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}).$$

Setzt man

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{F},$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F}.$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{B},$$

ferner

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G}.$$

Also ist nach Satz 3)

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}.$$

Man denke sich $\mathfrak{F}$ in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegt:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_t.$$

Da $\mathfrak{A}$ von niedrigerer Ordnung ist als $\mathfrak{H}$, so ist für $\mathfrak{A}$ der Hauptsatz bereits bewiesen; also ist

$$\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{A}', \ \mathfrak{P}_\mu \simeq \mathfrak{T}_\mu \text{ für } \nu = 2, 3, \ldots, m, \text{ sodaß } t = m.$$

Es ist

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_n .$$

Der zentrale Isomorphismus

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}$$

ordnet die Untergruppen $\mathfrak{T}_\mu$ von $\mathfrak{F}$ nach Satz 3) sich selber zu, da

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$$

und

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{G}.$$

Den Untergruppen $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{B}$ ordne er die Untergruppen $\mathfrak{U}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ für $\nu = 1, 2, \ldots n$ zu. Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \cdots \times \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \cdots \times \mathfrak{U}_n.$$

Es war

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s.$$

Da $\mathfrak{G}$ von geringerer Ordnung ist als $\mathfrak{H}$, gilt für $\mathfrak{G}$ bereits der Hauptsatz; also ist

$$\mathfrak{T}_\mu \simeq \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 2, 3, \ldots, m, \text{ so daß } m = r,$$
$$\mathfrak{U}_\nu \simeq \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n, \text{ so daß } n = s.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{A}' < \mathfrak{H}_i, \quad \mathfrak{R}_1 < \mathfrak{H}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{R}_1.$$

Es ist

$$\mathfrak{P}_1 \simeq \mathfrak{A}' \simeq \mathfrak{R}_1,$$
$$\mathfrak{P}_\mu \simeq \mathfrak{T}_\mu \simeq \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 2, 3, \ldots m,$$
$$\mathfrak{D}_\nu \simeq \mathfrak{U}_\nu \simeq \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Damit ist Fall 1) bewiesen.

Fall 2): Es enthalte keine der beiden Zerlegungen von $\mathfrak{H}$ einen kommutativen direkten Faktor.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-Komponente, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{R}_1$. Man setze

$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = \mathfrak{H}'.$$

Da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{H}' > \mathfrak{R}_1 \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G},$$

so ist

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times (\mathfrak{H}', \mathfrak{G}).$$

Man setze $(\mathfrak{H}', \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}'$, so daß

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Da alle Elemente von $\mathfrak{G}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{R}_1$ vertauschbar sind, so sind sie auch mit deren sämtlichen Komponenten, d. h. mit allen Elementen von $\mathfrak{H}'$, insbesondere mit allen Elementen von $\mathfrak{G}' < \mathfrak{H}'$ vertauschbar. Da $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$, so folgt, daß

$$\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}_i.$$

Wäre

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H},$$

so wäre

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{G}_i,$$

d. h. $\mathfrak{G}$ wäre eine kommutative Gruppe, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $\mathfrak{H}'$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{H}'$ gilt bereits der Hauptsatz. Zerlegt man $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ in direkte unzerlegbare Faktoren, so enthält eine der beiden Gruppen, z. B. $\mathfrak{A}'$, einen nicht kommutativen direkten Faktor, der zentral isomorph $\mathfrak{R}_1$. Da aber $\mathfrak{A}'$ nicht von höherer Ordnung ist als $\mathfrak{R}_1$, so ist

$$\mathfrak{R}_1 \backsimeq \mathfrak{A}'.$$

Es war

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}' = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}',$$

folglich

$$\mathfrak{G}' \backsimeq \mathfrak{B}',$$

d. h. $\mathfrak{B}'$ ist kommutativ. Es ist

$$\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{H}_i' = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{H}_i',$$

also auch

$$\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{H}_i < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i,$$

also

$$\mathfrak{R}_1 < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i.$$

Es sei

$$\mathfrak{R}_\varrho < \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i \text{ für } \varrho = 1, 2, \dots r,$$
$$\mathfrak{S}_\sigma < \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots s.$$

Also ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r = \mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{D}.$$

Es ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}_i,$$

ferner, da

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i > \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$

so ist nach Satz 2)

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i = \mathfrak{C} \times (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}).$$

Es ist

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i).$$

Da jedes Element, das den beiden Gruppen $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i$ gemeinsam ist, mit den Elementen der einen Gruppe vertauschbar, weil zur anderen gehörig ist, so ist es mit jedem Elemente von $\mathfrak{H}$ vertauschbar, also

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{H}_i, \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}_i) < \mathfrak{H}_i.$$

Da aber

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i) > \mathfrak{H}_i,$$

so ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}_i) = \mathfrak{H}_i.$$

Also ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < \mathfrak{H}_i, \quad (\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}).$$

Da aber

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) > (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}),$$

so ist

$$(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}_i, \mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}\ \mathfrak{H}_i = \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i.$$

Da $\mathfrak{B}$ nicht kommutativ, so ist $\mathfrak{B}_i$ von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i$ von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=\mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i$ gilt also bereits der Hauptsatz. Da bei der Zerlegung $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ nicht kommutative, $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{D}_i$ kommutative direkte unzerlegbare Faktoren liefern, so müssen die direkten unzerlegbaren Faktoren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ paarweise einander zentral isomorph sein, d. h. es ist

$$\mathfrak{P}_\mu \backsimeq \mathfrak{R}_\mu$$

für $\mu = 1, 2, \ldots m$, so daß $m=r$. Ebenso zeigt man, daß

$$\mathfrak{Q}_\nu \backsimeq \mathfrak{S}_\nu$$

für $\nu = 1, 2, \ldots n$, so daß $n=s$. Damit ist der zweite Fall des Hauptsatzes bewiesen. Da dieser für direkt unzerlegbare Gruppen trivial ist, gilt er allgemein.

Einfacher läßt sich ein spezieller Fall dieses Satzes beweisen.

Eine Gruppe, die außer E keine invarianten Elemente besitzt, ist identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar.

Kein direkter Faktor einer solchen Gruppe kann außer E invariante Elemente besitzen, da diese auch invariante Elemente der ganzen Gruppe wären.

Der Satz sei bereits bewiesen für alle Gruppen von niedrigerer Ordnung als die vorliegende. Es mögen die Bezeichnungen wie im Hauptsatze gebraucht werden. Es läßt sich ebenso, wie dort im Falle 2) zeigen, daß

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}'.$$

Da aber

$$\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}_i \text{ und } \mathfrak{G}_i = E,$$

so ist $\mathfrak{G}' = E$. Also ist

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}_1 \text{ oder}$$
$$\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = \mathfrak{R}_1 .$$

Da $\mathfrak{R}_1$ direkt unzerlegbar, so ist z. B.

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{A}', \ \mathfrak{B}' = E ,$$

also

$$\mathfrak{R}_1 < \mathfrak{A} .$$

Es sei

$$\mathfrak{R}_\varrho < \mathfrak{A} \text{ für } \varrho = 1, 2, \dots r ,$$
$$\mathfrak{S}_\sigma < \mathfrak{B} \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots s .$$

Also ist

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_r = \mathfrak{C} ,$$
$$\mathfrak{B} > \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_s = \mathfrak{D} .$$

Es ist

$$\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{C}, \ \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} ,$$

also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) .$$

Es ist aber

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) < (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = E ,$$

also ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} .$$

Ebenso zeigt man, daß

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D} .$$

Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{H}$, so ist für sie der Satz bereits bewiesen.

Es ist also

$$\mathfrak{P}_\mu = \mathfrak{R}_\mu \text{ für } \mu = 1, 2, \dots m, \text{ so daß } m = r ,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu = \mathfrak{S}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \dots n, \text{ so daß } n = s .$$

Da der Satz für direkt unzerlegbare Gruppen trivial ist, so gilt er allgemein.

§ 3.

Satz 4. In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren läßt sich das Produkt aller vorkommenden zyklischen Faktoren der gleichen Primzahlpotenzordnung durch das isomorphe Produkt aus irgend einer anderen Zerlegung ersetzen.

Es sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \ \mathfrak{H} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} ,$$

worin

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_m, \ \mathfrak{C} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_m ;$$

die $\mathfrak{P}_\mu$ und $\mathfrak{R}_\mu$ seien zyklische direkte Faktoren von der Primzahlpotenzordnung p^a. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ enthalten keine zyklischen direkten Faktoren der Ordnung p^a.

Der Satz sei bereits bewiesen in allen Fällen, in denen m kleiner ist als im vorliegenden Falle. Es sei

$$\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 \times \cdots \times \mathfrak{R}_m = \mathfrak{K},$$

dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{D};$$

setzt man

$$\mathfrak{K} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{G},$$

so wird

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{G}.$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{R}_1$. Es ist im Beweise des Hauptsatzes Fall 1) gezeigt worden, daß von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G} \text{ oder } \mathfrak{H} = \mathfrak{B}' \times \mathfrak{G}$$

mindestens eine besteht. Da $\mathfrak{B}$ keinen zyklischen direkten Faktor der Ordnung p^a besitzt, so ist hier

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G}.$$

Da $\mathfrak{H} > \mathfrak{A} > \mathfrak{A}'$, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}).$$

Setzt man $(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{F}$, so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}.$$

Es war

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}.$$

Da

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{F} \times \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{F} < \mathfrak{G},$$

ordnet dieser Isomorphismus $\mathfrak{F}$ sich selber zu. Der Gruppe $\mathfrak{B}$ ordne er die Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$ zu.

Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{D} \text{ und } \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{L}.$$

Da $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ nur aus $m-1$ zyklischen direkten Faktoren der Ordnung p^a bestehen, so ist der Satz für $\mathfrak{G}$ bereits bewiesen; also ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{D},$$

was zu beweisen war. Der Satz gilt also allgemein, wenn er für $m = 1$ bewiesen ist.

Für $m=1$ sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zyklische Gruppen der Ordnung p^a. Es sei $\mathfrak{A}'$ die $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{B}$-Komponente von $\mathfrak{C}$. Es wird wieder gezeigt, daß

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}'\times\mathfrak{D}.$$

Da $\mathfrak{A}'$ von der Ordnung p^a, so ist

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A},$$

also

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{D},$$

was zu beweisen war.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich:

In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren kann man das Produkt aller kommutativen Faktoren durch das entsprechende aus einer anderen Zerlegung ersetzen.

Satz 5. In einer Zerlegung einer Gruppe in direkte unzerlegbare Faktoren kann man irgend einen nicht kommutativen Faktor durch den zentral isomorphen aus einer anderen Zerlegung ersetzen.

Es sei

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B},\ \mathfrak{H}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D},$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ direkt unzerlegbar,

$$\mathfrak{A}\frown\mathfrak{C}.$$

Es ist

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i,$$

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i,$$

$$\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i,$$

also

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_i=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}_i=\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}_i$$

nach Satz 4. Also ist

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D}_i)=E.$$

Es ist

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D})<(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}_i,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{H}_i)=(\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{H}_i)=\mathfrak{H}_i,$$

also

$$(\mathfrak{A},\mathfrak{D})=(\mathfrak{A},\mathfrak{D}_i)=E.$$

Es ist jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}$ vertauschbar, da $\mathfrak{A}<\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i$, und jedes Element von $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{H}_i$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Das Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ ist ein direktes Produkt. Es ist

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}=\mathfrak{H},$$

da beide Produkte von gleicher Ordnung sind.

Für seine Ratschläge zur Vereinfachung der Beweisanordnung dieser Arbeit sage ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn *Frobenius* meinen Dank.

Die vorliegende Arbeit hatte ich der philosophischen Fakultät der Universität Berlin als Dissertation eingereicht und nach ihrer Genehmigung zurückerhalten, als die Arbeit des Herrn *Maclagan-Wedderburn**), die den gleichen Gegenstand behandelt, zu meiner Kenntnis gelangte.

Sein Beweis ist aber unvollständig. Die Richtigkeit der Gleichung S. 175 unten

$$A_2 \times \cdot\cdot \times A_p = \frac{B_1}{B_1'} \times B_2 \times \cdots \times B_q$$

wird nicht bewiesen, nicht einmal das Bestehen eines Isomorphismus zwischen diesen beiden Gruppen.

Auch sehe ich nicht, an welcher Stelle seines Beweises der Verfasser von der Voraussetzung der Unzerlegbarkeit der Faktoren Gebrauch macht.

Unrichtig ist ferner die Bemerkung S. 176, die ohne Einfluß auf das Hauptresultat ist und folgendermaßen wiedergegeben werden möge: „Eine Gruppe ist identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar, wenn die Ordnungen der Zentren der Faktoren untereinander teilerfremd sind.“ Sie müßte vielmehr lauten:

„Eine Gruppe ist dann und nur dann identisch eindeutig in direkte unzerlegbare Faktoren zerlegbar, wenn die Ordnung des Zentrums eines jeden Faktors zur Ordnung der Faktorgruppe eines jeden anderen Faktors nach seinem Kommutator teilerfremd ist.“

---

*) Annals of Mathematics, 2. series, vol. 10, p. 173. [July 1909.] On the Direct Product in the Theory of Finite Groups.

Sur le dernier théorème de *Fermat*.

Par M. *D. Mirimanoff* à Genève.

Le grand théorème de *Fermat* a été abordé depuis quelque temps par des côtés nouveaux. On connaît les remarquables recherches de M. *E. L. Dickson* publiées dans le „Mess. of Math." (mai et juin 1908) et le „Quart. Journ." (octobre 1908). Plus récemment M. *A. Wieferich*, en suivant la voie tracée par *Kummer*, a découvert un théorème important qu'il a fait connaître ici-même (t. 136, p. 293—302). A ce travail se rattachent plusieurs notes sur lesquelles nous allons revenir.

Rappelons les points principaux des recherches les plus récentes. Et voici d'abord l'énoncé du théorème de M. *Wieferich*: Si l'équation

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{1.}$$

est possible en nombres entiers premiers à p, le quotient de *Fermat* $q(2) = \frac{2^{p-1}-1}{p}$ est divisible par p.

Ce n'est pas la première fois que le quotient de *Fermat* faisait son apparition dans l'étude de l'équation (1.), mais avant M. *Wieferich* son rôle était secondaire, la condition $q(2) \not\equiv 0 \pmod p$ ne servait qu'à exclure les solutions x, y, z appartenant au groupe incomplet $\frac{x}{y} \equiv 1$ ou -2 ou $-\frac{1}{2}$.

Etait-il possible de généraliser le résultat obtenu par M. *Wieferich*? Avant de chercher une réponse à cette question, il importait de simplifier la démonstration du géomètre allemand. Ce premier pas a été fait par M. *G. Frobenius* dans une note des „Sitzungsb. der Kgl. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin" du 2 déc. 1909, reproduite dans le t. 137 de ce Journal (p. 314), et par l'auteur de ce travail, dans „L'Enseignement Mathématique" du 15 nov. 1909. Il restait à généraliser les principes de ces démonstrations.

Or toutes les recherches se rattachant au théorème de M. *Wieferich* sont basées sur un critérium donné par *Kummer* dans les „Abh. d. K. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin“ 1857.

Posons

$$\varphi_i(t) = t - 2^{i-1}t^2 + 3^{i-1}t^3 - \cdots - (p-1)^{i-1}t^{p-1}.$$

Supposons que l'équation (1.) admette une solution x, y, z première à p. Il résulte des recherches de *Kummer*, comme je l'ai montré dans le t. 128 de ce Journal, que chacun des six rapports

$$(2.) \qquad \frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$$

vérifie le système des $\frac{p-1}{2}$ congruences

$$(3.) \qquad \begin{aligned} B_i \varphi_{p-2i}(t) &\equiv 0 \pmod p, \qquad \left(i = 1, 2, \ldots \tfrac{p-3}{2}\right) \\ \varphi_{p-1}(t) &\equiv 0, \end{aligned}$$

B_i étant le $i^{\text{ième}}$ nombre de *Bernoulli**).

Les six rapports (2.) annulent par conséquent (mod p) tout polynome $F(t)$ qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum_i X_{p-2i} B_i \varphi_{p-2i}(t) + X_{p-1}\varphi_{p-1}(t),$$

les coefficients X étant des fonctions entières de t à coefficients entiers (mod p).

Or le résultat principal obtenu par M. *Wieferich* se résume en ceci: on peut choisir les polynomes X de telle manière que le polynome $F(t)$ se réduise, abstraction faite de facteurs qu'on a le droit d'écarter, à $2q(2)$ (mod p). J'ai cherché à généraliser ce résultat.

Dans une note insérée dans les „Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris“ du 24 janvier 1910, j'ai montré, en prenant comme point de départ le développement classique de $\frac{x}{e^x-1}$, qu'à tout entier m premier à p on pouvait faire correspondre un polynome du type $F(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes: abstraction faite de facteurs qu'on peut écarter 1) son degré est égal à $m-2$, 2) il se réduit, pour $t=-1$, à $(-1)^m m q(m)$ (mod p). En faisant $m=2$, on retrouve le critérium de M. *Wieferich*. En

---

*) M. *G. Frobenius* a obtenu ces congruences par une voie plus facile dans sa note des „Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin“ du 24 février 1910.

faisant $m=3$, on a la condition $q(3)\equiv 0$. Mais les critères deviennent moins simples en donnant à m des valeurs supérieures à 3.

M. *Frobenius* a montré tout récemment (Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., Berlin du 24 février 1910) qu'on pouvait arriver aux mêmes résultats par une voie plus élémentaire, en s'appuyant sur la relation symbolique entre les nombres de *Bernoulli* donnée par *Lucas*. A l'aide de considérations très ingénieuses, M. *Frobenius* en a déduit les conditions que je viens de rappeler, ainsi que plusieurs critères nouveaux.

Je crois cependant qu'il ne serait pas inutile de revenir sur les résultats de mon travail, en indiquant quelques-unes des conséquences que j'ai dû laisser de côté dans ma note des Comptes Rendus. Je désirerais aussi attirer l'attention sur une propriété curieuse du polynome $\varphi_{p-1}(t)$ qui se rattache à ces résultats. On a dû remarquer le rôle joué par le polynome $\varphi_{p-1}(t)$ dans la solution de plusieurs problèmes de la théorie des nombres et en particulier dans l'étude de l'équation (1.) et du quotient de *Fermat*. Déjà envisagé par *Euler*, il a été utilisé par *Stern*, M. *Maillet*, M. *Lerch*. On pourrait y rattacher aussi les critères précédemment cités, car les conditions $q(2)\equiv 0$, $q(3)\equiv 0$ reviennent à celle-ci: la congruence $\varphi_{p-1}(t)\equiv 0$ admet les racines $t\equiv 1$ et $t\equiv 2$.

Désignons l'un des rapports (2.) par τ. Je ferai voir que le polynome $\varphi_{p-1}(t)$ s'annule non seulement pour $t=\tau$ (en vertu du critérium (3.)), mais aussi pour $t=-\tau$ et $t=-\tau^2$. Malgré l'avantage réel des notations de M. *Frobenius*, je continuerai, pour ne pas modifier les énoncés des théorèmes, à me servir des miennes, sauf pourtant dans le dernier paragraphe de ce travail.

§ 1.

Transformation du système (3.). Nous commencerons par donner une autre forme au critérium (3.). En désignant $\frac{x}{y}$ par τ, la suite (2.) s'écrit

$$\tau,\ -1-\tau,\ -\frac{\tau}{1+\tau},\ \frac{1}{\tau},\ -\frac{1}{1+\tau},\ -1-\frac{1}{\tau};$$

si donc le système (3.) s'annule pour $t=\tau$, il s'annule aussi pour $t=-1-\tau$ etc. Du reste, ces six rapports ne sont pas nécessairement distincts, leur nombre peut se réduire à 2 ou à 3. Abstraction faite des valeurs $0, -1$, exclues par hypothèse, le premier cas a lieu, lorsque τ est

racine de $t^2+t+1\equiv 0$, et le second, lorsque τ est l'un des nombres $1, -2, -\frac{1}{2} \pmod p$.

Posons

$$\psi_i(t) = \varphi_i(-1-t).$$

En vertu de la remarque que nous venons de faire, chacun des six rapports (2.) vérifie le système

$$(4.) \qquad \begin{cases} B_i \psi_{p-2i}(t) \equiv 0, & \left(i = 1, 2, \dots \frac{p-3}{2}\right) \\ \psi_{p-1}(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Je ferai remarquer que le polynome $\psi_{p-1}(t)$ est identique à $\varphi_{p-1}(t) \pmod p$, puisque $\varphi_{p-1}(t)$, qu'on peut écrire

$$\frac{(1+t)^p - 1 - t^p}{p},$$

ne varie pas en remplaçant t par $-1-t$. Rappelons encore les propriétés caractéristiques des polynomes $\varphi(t)$ et $\psi_i(t)$.

Deux polynomes consécutifs φ_i et φ_{i+1} sont liés par la relation

$$(5.) \qquad \varphi_{i+1}(t) \equiv t \frac{d\varphi_i(t)}{dt},$$

qu'on peut écrire, avec M. *Frobenius*

$$\varphi_{i+1}(t) \equiv D_{l(t)} \varphi_i(t),$$

d'où

$$(5^a.) \qquad \psi_{i+1}(t) \equiv (1+t) \frac{d\psi_i(t)}{dt}.$$

Or $\varphi_1(t) \equiv 1 - (1+t)^{p-1}$. Donc $\varphi_i(t)$ est divisible par $(1+t)^{p-i}t$ et $\psi_i(t)$ par $t^{i-1}(1+t)$, pour $i > 1$.

Les relations (5.) et (5ª.) sont équivalentes à celles-ci:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \varphi_i(t) \equiv \int_0^t \frac{\varphi_{i+1}(t)}{t} dt, \quad \psi_i(t) \equiv \int_0^t \frac{\psi_{i+1}(t)}{1+t} dt, & (i > 1) \\ \psi_1(t) \equiv \int_0^t \frac{\psi_2(t)}{1+t} dt + 1. \end{cases}$$

Or on obtient le polynome $\varphi_{p-1}(t)$ ou $\psi_{p-1}(t)$ en arrêtant la série

$$l(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$$

au terme en t^{p-1}. Il en résulte que la série $l^x(1+t)$ arrêtée au terme en t^{p-1} donne, pour tout $x < p-1$, un polynome congru à $x!\, \psi_{p-x}(t)$.

Nous allons nous appuyer sur cette propriété des $\psi_i(t)$ pour former des polynomes s'exprimant en fonction linéaire homogène des premiers membres des congruences (3.) ou (4.)*).

§ 2.

Principe fondamental. Supposons qu'une fonction de x et de e^x, que je désignerai par $f(x,e^x)$, soit développable suivant les puissances de x dans le voisinage du point $x=0$. Si f est une fonction rationnelle à coefficients entiers, les coefficients a_i dans

$$f(x,e^x)=a_0+a_1x+\cdots+a_ix^i+\cdots$$

seront rationnels. Supposons de plus que pour $i<p-1$, les a_i soient entiers (mod p), c'est-à-dire que les dénominateurs des a_i ne soient pas divisibles par p.

Posons $e^x=1+t$, d'où $x=l(1+t)$.

Dans certains cas, le développement du premier membre suivant les puissances de t s'obtient d'une manière directe. Arrêté au terme en t^{p-1} ce développement donne un polynome que j'appellerai $P(t)$. On aura donc, en vertu du théorème du paragraphe précédent,

$$P(t)\equiv a_0+a_1\psi_{p-1}(t)+2!\,a_2\psi_{p-2}(t)+\cdots+(p-2)!\,a_{p-2}\psi_2(t)+a_{p-1}t^{p-1},$$

ce qui nous fournit une relation entre les polynomes $\psi_i(t)$.

Dans les congruences fondamentales (4.) les polynomes $\psi_{p-2i}(t)$ sont associés aux nombres de *Bernoulli* B_i. Or la fonction génératrice la plus simple fournissant des développements de cette forme particulière est la fonction classique

$$(7.)\qquad \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}\frac{B_i}{2i!}x^{2i}.$$

Nous la prendrons comme point de départ pour former les fonctions génératrices particulières dont nous aurons besoin dans ce travail.

§ 3.

Première série de relations déduites de (7.). En remplaçant dans (7.) e^x par $1+t$, il vient

---

*) On pourra toujours ajouter à cette fonction un terme de la forme $X_1\varphi_1(t)$, puisque $\varphi_1(t)$ s'annule pour toutes les valeurs entières de t, sauf $t\equiv-1$, exclue par hypothèse.

$$(8.)\quad \frac{\psi_{p-1}(t)}{t}+\frac{t^{p-1}}{p}\equiv 1-\frac{\psi_{p-1}(t)}{2}+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}(-1)^{i-1}B_i\psi_{p-2i}(t)+(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu!}t^{p-1},$$

en posant $\nu=\frac{p-1}{2}$.

Pour $t=-1$, tous les polynomes $\psi_i(t)$ s'annulent (mod p) et il vient

$$(9.)\qquad (-1)^{\nu}\frac{B_\nu}{2\nu!}+\frac{1}{p}\equiv 1 \pmod p,$$

relation connue.

La relation (8.) ne donne donc rien de nouveau, mais elle pourrait servir à déduire des $\nu-1$ premières congruences du système (4.) la condition $\psi_{p-1}(t)\equiv 0$ ou $\varphi_{p-1}(t)\equiv 0$.

Multiplions maintenant (7.) par x^{n-1}, n étant un nombre entier inférieur à p et supérieur à 1. Remplaçons encore e^x par $1+t$. En arrêtant les développements aux termes en t^{p-1}, le premier membre devient

$$\frac{n!\,\psi_{p-n}(t)}{t}+a_p^{(n)}t^{p-1},$$

$a_p^{(n)}t^p$ étant le terme en t^p dans $l^n(1+t)$. Lorsque n est pair, le second membre ne contient que des termes en $\psi_\varkappa(t)$ ($\varkappa=p-n+1$, $p-n$, etc.). On aura donc en faisant $t=-1$,

$$a_p^{(n)}\equiv 0.$$

Lorsque n est impair, le second membre contient encore le terme en t^{p-1}, d'où

$$a_p^{(n)}\equiv(-1)^{\frac{p-n}{2}-1}\frac{B_{\frac{p-n}{2}}}{(p-n)!}.$$

En tenant compte de ces relations, le premier membre se réduit à $\frac{n!\,\psi_{p-n}(t)}{t}$ et le second à une suite de termes en $\psi_\varkappa(t)$. Remplaçons t par $-1-t$; nous aurons une relation entre les polynomes $\varphi_\varkappa(t)$. Mais dans cette relation les nombres B_i ne sont pas associés aux $\varphi_{p-2i}(t)$. Pour donner au second membre cette forme particulière, nous appliquerons $n-1$ fois de suite l'opération $t\frac{d}{dt}$ ou $D_{l(t)}$. On aura donc, en vertu du critérium (3.),

$$D_{l(t)}^{n-1}\frac{\varphi_{p-n}(t)}{1+t}\equiv 0.$$

Or $(1+t)^p$ jouant le rôle d'une constante (mod p), on a le droit de multiplier par $(1+t)^p$ sous le signe D, ce qui donne, en remplaçant $(1+t)^{p-1}$ par $1-\varphi_1(t)$,

$$D_{l(t)}^{n-1}(\varphi_{p-n}(t)-\varphi_{p-n}(t)\varphi_1(t))\equiv 0.$$

On en déduit immédiatement en appliquant une formule donnée par *Cauchy*

$$\varphi_n(t)\,\varphi_{p-n}(t) \equiv 0. \qquad (n=1,2,\ldots p-1) \tag{10.}$$

D'où ce critérium que j'ai déjà établi d'une manière un peu différente dans le t. 128 de ce Journal: chacun des six rapports (2.) vérifie le système des congruences (10.).

Il est aisé maintenant d'en déduire la propriété du polynome $\varphi_{p-1}(t)$ qui a été énoncée dans l'introduction.

Je dis qu'on a

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} \varphi_n(t)\,\varphi_{p-n}(t) \equiv \varphi_{p-1}(-t^2).$$

En effet, le produit du terme en t^k dans $\varphi_n(t)$ par le terme en t^l dans $\varphi_{p-n}(t)$, k et l étant deux nombres quelconques inférieurs à p, est égal à

$$(-1)^{k+l} k^{n-1} l^{p-n-1} t^{k+l}.$$

Or la somme $\sum_n k^{n-1} l^{p-n-1}$ est congrue à zéro pour $k \neq l$ et à $(p-1)k^{p-2}$ pour $k=l$.

On obtient donc bien le polynome $\varphi_{p-1}(-t^2)$. En appliquant le critérium (10.), on a

$$\varphi_{p-1}(-t^2) \equiv 0 \tag{11.}$$

pour $t \equiv \tau$, τ étant l'un quelconque des rapports (2.)

D'autre part τ annule $\varphi_{p-1}(t)$; on aura donc en même temps

$$(1+\tau)^p \equiv 1+\tau^p, \quad (1-\tau^2)^p \equiv 1-\tau^{2p} \pmod{p^2}.$$

D'où

$$(1-\tau)^p \equiv 1-\tau^p \pmod{p^2}$$

ou

$$\varphi_{p-1}(-\tau) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{12.}$$

Par conséquent, le polynome $\varphi_{p-1}(t)$ s'annule non seulement pour $t \equiv \tau$, mais aussi pour $t \equiv -\tau$ et pour $t \equiv -\tau^2$. C. Q. F. D.

Corollaire. Si τ est l'un des nombres $1, -2, -\frac{1}{2}$, $\varphi_{p-1}(t) \equiv 0$ admet les racines $t \equiv 1$ et $t \equiv 2$, d'où $q(2) \equiv 0$, $q(3) \equiv 0$.

Soit maintenant a un entier quelconque inférieur à p. Par une voie analogue à celle que nous avons suivie pour obtenir la congruence (11.), on arrive au critérium

$$\sum_{i=1}^{i=p-1} (-1)^{i+\overline{ia}}\, i^{p-2}\, t^{i+\overline{ia}} \equiv 0, \tag{13.}$$

$\overline{ia}$ désignant le plus petit reste positif de $ia \pmod p$. En faisant $a=1$, on retombe sur la congruence (11.). Je me bornerai à cette indication.

§ 4.

Deuxième série de relations déduites de (7.). Revenons à la série (7.). Soit m un entier premier à p. En remplaçant x par mx et en retranchant on a l'identité connue

$$(14.)\quad x\left(\frac{m}{e^{mx}-1}-\frac{1}{e^x-1}\right)=-\frac{m-1}{2}x+\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i-1}(m^{2i}-1)\frac{B_i}{2i!}x^{2i},$$

dont le premier membre peut être mis sous la forme $x\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{\alpha_i}{e^x-\alpha_i}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ sont les racines de $\frac{z^m-1}{z-1}=0$.

Je ferai encore $e^x=1+t$. En arrêtant la série du second membre au terme en t^{p-1}, on obtient une fonction linéaire homogène des premiers membres des congruences (4.) plus le terme

$$(-1)^{\nu-1}(m^{p-1}-1)\frac{B_\nu}{(p-1)!}t^{p-1}.$$

D'autre part, le premier membre de (14.) se transforme en

$$\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{\alpha_i l(1+t)}{1-\alpha_i+t},$$

que nous arrêterons aussi au terme en t^{p-1}. Posons

$$R_i=\frac{\varphi_{p-1}(-1+\alpha_i)}{(-1+\alpha_i)^{p-1}}\equiv\frac{\varphi_{p-1}(-\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^{p-1}}.$$

Nous pouvons écrire

$$l(1+t)\equiv\varphi_{p-1}(t)-R_it^{p-1}+R_it^{p-1}+t^pS(t),$$

$S(t)$ étant une série entière, et comme $\varphi_{p-1}(t)-R_it^{p-1}$ est divisible par $1-\alpha_i+t$, la série $\frac{l(1+t)}{1-\alpha_i+t}$ arrêtée au terme en t^{p-1}, se réduit (mod p) au polynome

$$\frac{\varphi_{p-1}(t)-R_it^{p-1}}{1-\alpha_i+t}+\frac{R_i}{1-\alpha_i}t^{p-1}.$$

En changeant t en $-1-t$, nous aurons la relation

$$(15.)\quad\left\{\begin{aligned}&-\varphi_{p-1}(t)\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{\alpha_i}{t+\alpha_i}+(1+t)^{p-1}\sum_{i=1}^{i=m-1}\left(\frac{\alpha_iR_i}{t+\alpha_i}+\frac{\alpha_iR_i}{1-\alpha_i}\right)\\&\quad\equiv-\frac{m-1}{2}\varphi_{p-1}(t)+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}(-1)^{i-1}(m^{2i}-1)\,B_i\varphi_{p-2i}(t)\\&\qquad+(-1)^{\nu-1}(m^{p-1}-1)\frac{B_\nu}{(p-1)!}(1+t)^{p-1},\end{aligned}\right.$$

qui est une identité (mod p).

Faisons $t=0$; tous les termes en φ_{p-1}, φ_{p-2i} s'annulent (mod p) et il vient

$$(-1)^{\nu-1}(m^{p-1}-1)\frac{B_\nu}{(p-1)!}\equiv\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{R_i}{1-\alpha_i}.$$

Mais on a $(m^{p-1}-1)B_\nu = q(m)B_\nu p$ et comme d'autre part, en vertu de la relation (9.),

$$\frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu p}{(p-1)!}\equiv 1,$$

il vient

$$q(m)\equiv\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{R_i}{1-\alpha_i}. \tag{16.}$$

Cette expression générale du quotient de *Fermat* a déjà été indiquée sous une forme un peu différente par M. *Lerch* dans une note des „Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris“ 1906.

Multiplions maintenant la relation (15.) par le produit $\prod_{i=1}^{i=m-1}(t+\alpha_i)$ et substituons à t l'un des rapports (2.). Les termes en φ_{p-1}, φ_{p-2i} tombent en vertu de (3.) et nous aurons, en tenant compte de (16.) et abstraction faite de facteurs qu'on peut écarter:

$$\prod_{i=1}^{i=m-1}(t+\alpha_i)\sum_{i=1}^{i=m-1}\frac{R_i}{t+\alpha_i}\equiv 0. \tag{17.}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant: Si l'équation (1.) admet une solution x, y, z première à p, chacun des six rapports (2.) vérifie les congruences (17.).

Nous avons déjà indiqué ce critérium dans les Comptes Rendus du 24 janvier 1910.

Le premier membre de (17.) est un polynome à coefficients entiers (mod p). Son degré est égal à $m-2$ et pour $t=-1$, il se réduit à $(-1)^m m\,q(m)$, puisque $\Pi(t+\alpha_i)=(-1)^{m-1}m$, pour $t=-1$.

Or le nombre des rapports (2.) distincts (mod p) est au moins égal à 2, et comme pour $m=2$, $m=3$, le degré de (17.) est inférieur à 2, le premier membre de (17.) est identiquement nul (mod p) pour ces valeurs de m, d'où, en faisant $t=-1$, $m\,q(m)\equiv 0$. Nous avons donc les conditions $q(2)\equiv 0$ (critérium de *Wieferich*) et $q(3)\equiv 0$.

§ 5.

Autres critères particuliers. La propriété suivante simplifie la discussion de la congruence (17.): lorsque m est un nombre impair, la congruence (17.) admet la racine $t\equiv 1$.

Voici comment cette propriété peut être déduite de l'identité (15.). On a, pour m impair

$$\sum_i \frac{a_i}{1+a_i} = \frac{m-1}{2}.$$

Si donc l'on fait $t=1$ dans (15.), les termes en $\varphi_{p-1}(t)$ tombent, les termes en $\varphi_{p-2i}(t)$ s'annulent, puisque $\varphi_{p-2i}(1)\equiv 0$, et l'identité (15.) se réduit, en tenant compte de la relation (16.), à

$$\sum_i \frac{R_i}{1+a_i} \equiv 0. \tag{18.}$$

On voit que cette propriété a lieu indépendamment du critérium de *Wieferich*. Au contraire, pour m pair, le premier membre de (17.) n'est divisible par $t-1$ que si la condition $\varphi_{p-1}(1)\equiv 0$ ou $q(2)\equiv 0$ est remplie (cf. *G. Frobenius*, Sitzungsber. 1910, p. 206).

Il est facile maintenant de retrouver le critérium relatif à $m=5$ donné par M. *G. Frobenius*.

Pour $m=5$, le degré de la congruence (17.) étant égal à trois, cette congruence est une identité (mod p), lorsque les six rapports (2.) sont distincts. On a alors $q(5)\equiv 0$.

Si donc le quotient de *Fermat* $q(5)$ n'est pas divisible par p, les rapports τ ne sauraient appartenir qu'à l'un des groupes incomplets. Lorsque p est un nombre de la forme $3n+2$, le groupe des racines de $t^2+t+1\equiv 0$ doit être exclu, les rapports τ appartiennent au groupe $1, -2, -\frac{1}{2}$ et le premier membre de (17.) est de la forme $c(t-1)(t+2)(2t+1)$, c étant un nombre entier (mod p); et comme pour $t=-1$, ce polynome doit se réduire à $-5\,q(5)$, on a $c\equiv -\frac{5\,q(5)}{2}$.

Mais supposons que p soit un nombre de la forme $3n+1$. On aurait encore à envisager le groupe des racines de $t^2+t+1\equiv 0$ et alors le premier membre de (17.) se réduirait à $\frac{5\,q(5)}{2}(t^3-1)$.

On peut donner une forme un peu différente à ces critères de M. *Frobenius*. Posons

$$A_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} \alpha_i^k R_i, \tag{19.}$$

k étant l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots m-1$.

Or quel que soit le reste de p (mod m), les A_k sont liés par les relations

(20.) $$A_k + A_{m-1-k} \equiv 0 \pmod{p},$$

qu'on établit sans peine.

Soit $m=5$. En tenant compte de ces relations, la congruence (17.) s'écrit

$$(t-1)(A_0 t^2 - A_1 t + A_0) \equiv 0,$$

d'où

$$5\,q(5) \equiv 2(2A_0 + A_1).$$

Donc pour que la congruence (17.) admette les racines 1, -2, $-\frac{1}{2}$, il faut et il suffit qu'on ait

(21.) $$5A_0 + 2A_1 \equiv 0,$$

et pour qu'elle admette les racines de $t^2+t+1\equiv 0$ il faut et il suffit qu'on ait

(22.) $$A_0 + A_1 \equiv 0.$$

Dans le premier cas $5q(5)\equiv -A_0$ et dans le second $5q(5)\equiv 2A_0$. Posons

$$C_k = \sum_i \frac{1}{5i-k} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots \left[\tfrac{p+k-1}{5}\right]\right)$$

et soit $p=5n+\varepsilon$.

Pour $\varepsilon=1$, la condition (21.) fournit la relation $5C_0+2C_1\equiv 0$ et, pour $\varepsilon=4$, la relation $5C_1+2C_2\equiv 0$, qui reviennent à celle-ci

(23.) $$5\,q(5) \equiv 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tandis que, pour $\varepsilon=2$ et $\varepsilon=3$, la condition (21.) est respectivement équivalente à

(24.) $$\begin{aligned} 5C_0 - 3C_1 &\equiv 0 \text{ et} \\ 5C_2 - 3C_3 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la condition (22.). Pour $\varepsilon=1$, elle fournit la relation $C_0+C_1\equiv 0$ et, pour $\varepsilon=4$, la relation $C_1+C_2\equiv 0$, qui reviennent à celle-ci

(25.) $$5\,q(5) \equiv -2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

tandis que, pour $\varepsilon=2$ et $\varepsilon=3$, la condition (22.) est équivalente à

(26.) $$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \equiv 0.$$

On a donc le critérium suivant:

1) $p \equiv 2 \pmod 3$. Si $q(5)$ n'est pas divisible par p, on a pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 4$, la condition (23.) et pour $\varepsilon = 2$ et $\varepsilon = 3$ l'une des conditions (24.).

2) $p \equiv 1 \pmod 3$. Pour $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 4$ on a l'une des conditions (23.), (25.), et pour $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 3$ l'une des conditions (24.), (26.).

Le cas de $m = 7$ se traite d'une manière analogue. En tenant compte des relations (20.), la congruence (17.) s'écrit

(27.) $$(t-1)(A_0 t^4 - A_1 t^3 + (A_0 + A_2) t^2 - A_1 t + A_0),$$

d'où

$$7\,q(7) \equiv 2(3A_0 + 2A_1 + A_2).$$

La congruence (27.) est une identité, lorsque les six rapports (2.) sont distincts; on a alors $q(7) \equiv 0$. Si donc le quotient de *Fermat* $q(7)$ n'est pas divisible par p, les rapports τ appartiennent à l'un des groupes incomplets.

Or, pour que la congruence (27.) admette le groupe $1, -2, -\frac{1}{2}$, il faut et il suffit qu'on ait

(28.) $$21A_0 + 10A_1 + 4A_2 \equiv 0,$$

et pour qu'elle admette les racines de $t^2 + t + 1 \equiv 0$, il faut et il suffit qu'on ait

(29.) $$A_1 + A_2 \equiv 0.$$

Dans le premier cas on a

(30.) $$14\,q(7) \equiv -9A_0 - 2A_1$$

et dans le second

(31.) $$7\,q(7) \equiv 2(3A_0 + A_1).$$

Il serait facile d'exprimer ces conditions en fonction des sommes telles que C_k.

§ 6.

Simplification du critérium (17.) *dans le cas où m est un nombre composé.* Il est aisé de montrer que la congruence (17.) peut être simplifiée dans le cas où m est un nombre composé. Posons

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{t+\alpha_i} = S_m$$

et soit S'_m la somme $\Sigma \frac{R_i}{t+\alpha_i}$ étendue aux racines primitives de $z^m - 1 = 0$. On connaît le procédé permettant de dégager les racines primitives de

l'ensemble de toutes les racines de cette équation. En appliquant ce procédé à nos sommes, on obtient S'_m à l'aide d'une suite des S_k, les indices k étant des diviseurs de m. En multipliant par le produit $\prod_{i=1}^{i=m-1}(t+\alpha_i)$ et en observant que les termes en S_k s'annulent en vertu du critérium (17.), on aura la congruence réduite

$$(32.) \qquad \prod_{i=1}^{i=m-1}(t+\alpha_i)\sum_i{}' \frac{R_i}{t+\alpha_i} \equiv 0,$$

la somme étant étendue aux racines primitives de $z^m-1=0$.

Or le premier membre de cette congruence se décompose en deux facteurs: le produit des $t+\alpha_i$ relatifs aux racines non primitives et un polynome dont le degré est égal à $\varphi(m)-1$. Nous verrons du reste dans le paragraphe suivant que ce polynome s'annule pour $t=-1 \pmod p$, lorsque m n'est pas une puissance d'un nombre premier; il se ramène alors à un polynome de degré $\varphi(m)-2$. Pour $m=10$, p. ex., on a un polynome du second degré.

On obtient ainsi de nouveaux critères qui peuvent être rapprochés de ceux que nous avons déduits de la congruence (17.) dans le cas de m premier. Je me bornerai à cette remarque. Mais avant de terminer cette étude je voudrais revenir sur l'expression générale du quotient de *Fermat* que nous avons tirée de l'identité (15.).

§ 7.

Remarques sur le quotient de Fermat. Nous avons vu qu'on a

$$(16.) \qquad q(m) = \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{1-\alpha_i},$$

où

$$R_i \equiv \frac{\varphi_{p-1}(-\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^{p-1}} \equiv -\frac{f_{p-1}(\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^{p-1}},$$

en posant, avec M. *Frobenius*

$$f_{p-1}(t) \equiv -\varphi_{p-1}(-t) \equiv t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^{p-1}}{p-1}.$$

On en tire la formule

$$(33.) \qquad q(m) \equiv -\sum_{i=1}^{i=m-1}{}' \frac{f_{p-1}(\alpha_i)}{1-\alpha_i^p},$$

déjà indiquée par M. *Lerch* dans les Comptes Rendus 1906. De cette

expression on déduit immédiatement les formules de *Sylvester* que nous avons rectifiées dans le t. 115 de ce Journal. On a, en effet,

$$\frac{m}{1-\alpha_i^p} = -\sum_{s=1}^{s=m} s\,\alpha_i^{p(s-1)},$$

d'où

$$q(m) \equiv \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{x_n}{p-n}, \tag{34.}$$

en posant

$$x_n \equiv \frac{n}{p} \pmod m. \qquad (0 < x_n \leqq m)$$

En remplaçant la somme $\sum_{s=1}^{s=m} s\,\alpha_i^{p(s-1)}$ par $\sum_{s=1}^{s=m-1} s\,\alpha_i^{ps}$, on obtient la formule

$$q(m) \equiv \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{y_n}{n}, \tag{35.}$$

où

$$y_n \equiv -\frac{n}{p} \pmod m, \qquad (0 \leqq y_n < m)$$

donnée dans la note déjà citée en même temps que la formule de *Sylvester* (34.) et retrouvée sous une autre forme par M. *Lerch* dans les Math. Ann. t. 60. L'expression de M. *Lerch*

$$q(m) \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \frac{1}{\nu m} \left[\frac{\nu m}{p}\right]$$

s'obtient en posant $n \equiv \nu m \pmod p$, d'où $y_n \equiv \left[\frac{\nu m}{p}\right]$.

Il serait plus difficile de déduire de la formule (33.) les expressions réduites que nous avons données dans le t. 115 de ce Journal et que M. *Lerch* a généralisées dans sa note des Comptes Rendus. Par contre, comme je l'ai déjà fait remarquer dans le travail cité, les formules de *Sylvester* s'obtiennent facilement à l'aide du procédé qui nous a servi à établir les expressions réduites.

Le quotient de *Fermat* s'exprime très simplement à l'aide des sommes A_k du paragraphe 5. On a, en effet,

$$m\,q(m) \equiv -\sum_{i=1}^{i=m-1} R_i(1 + 2\alpha_i + \cdots + m\alpha_i^{m-1}) \equiv -\sum_{k=0}^{k=m-1} (k+1) A_k,$$

d'où, en tenant compte des relations (20.),

$$m\,q(m) \equiv (m-1) A_0 + (m-3) A_1 + \cdots + 2 A_{\frac{m-3}{2}},$$

pour m impair, et

$$m\,q\,(m)\equiv(m-1)\,A_0+(m-3)\,A_1+\cdots+A_{\frac{m-2}{2}}$$

pour m pair.

Il serait facile d'exprimer ces formules à l'aide des sommes telles que C_k.

En terminant je voudrais attirer l'attention sur une propriété des sommes (33.) que j'ai mentionnée dans le paragraphe précédent.

Supposons que m soit un nombre composé. On a le théorème suivant: la somme

$$\sum_i{}' \frac{R_i}{1-\alpha_i}$$

étendue aux racines primitives de $z^m-1=0$ est congrue à $q(l)$, lorsque m est une puissance l^h d'un nombre premier l, et elle est nulle (mod p), lorsque m n'est pas une puissance d'un nombre premier.

On pourrait établir ce théorème par des considérations analogues à celles dont nous nous sommes servi dans le paragraphe précédent. Mais il est plus simple de procéder d'une manière différente.

Déjà M. *Lerch* a fait remarquer que la formule (33.) s'etablit directement en développant en séries les binomes $(1-\alpha_i)^p$.

On a en effet

$$(1-\alpha_i)^p\equiv 1-\alpha_i^p-p f_{p-1}(\alpha_i) \pmod{p^2}$$

d'où

$$\text{(36.)}\qquad \frac{\prod_i(1-\alpha_i)^p}{\prod_i(1-\alpha_i^p)}\equiv 1-p\sum_i\frac{f_{p-1}(\alpha_i)}{1-\alpha_i^p} \pmod{p^2},$$

la somme et les produits étant étendus à un ensemble quelconque des α_i.

Si l'indice i parcourt toute la suite $1,2,\ldots m-1$, on obtient la formule (33.), le premier membre étant égal à m^{p-1}.

Mais bornons-nous aux racines primitives de $z^m-1=0$.

Si $m=l^h$, l étant un nombre premier, la norme de $(1-\alpha_i)=l$ et le premier membre de (36.) devient l^{p-1}, d'où

$$\text{(37.)}\qquad q(l)\equiv-\sum_i{}'\frac{f_{p-1}(\alpha_i)}{1-\alpha_i^p}.$$

Dans tous les autres cas, $(1-\alpha_i)$ est une unité algébrique, sa norme $=1$, le premier membre de (36.) se réduit à 1 et l'on a

$$\text{(38.)}\qquad \sum_i{}'\frac{f_{p-1}(\alpha_i)}{1-\alpha_i^p}\equiv 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il en résulte, comme nous l'avons déjà dit au paragraphe 6, que la congruence (32.) admet la racine $t \equiv -1$, lorsque m n'est pas une puissance d'un nombre premier.

En supposant $m = 2^h$, on déduit facilement de (37.) l'expression

$$(39.) \qquad q(2) \equiv 2^{h-2} \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{\varepsilon}{n},$$

où $\varepsilon = 1$, si le reste positif de $-\frac{n}{p} \pmod{m}$ est égal ou supérieur à $\frac{m}{2}$, et $\varepsilon = -1$, si ce reste est inférieur à $\frac{m}{2}$. En faisant $h = 2$, on en déduit immédiatement les formules de *Sylvester* démontrées par *Stern.*

Du reste la plupart des expressions connues de $q(m)$ découlent des formules (37.) et (38.).

GENE
UNIV
MAR

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 139.

Heft 4.

Ausgegeben den 20. Februar.

Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1911.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 16.—.

Band 139. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Koebe, P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweiter Teil: Die zentralen Uniformisierungsprobleme . . . . Seite 251

Remak, R., Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren . . . . . — 293

Mirimanoff, D., Sur le dernier théorème de *Fermat* . . . . . — 309

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

GEORG REIMER IN BERLIN W. 35
VERLAGSBUCHHANDLUNG

Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik

von **Dr. F. G. MEHLER**

bearbeitet von A. SCHULTE-TIGGES
Direktor des Realgymnasiums zu Cassel

erscheinen in folgenden Ausgaben und Teilen:

Ausgabe A. Stammbuch, Vollausgabe.

26. Auflage. Gebunden 2.40 Mark

Ergänzungsheft, enthaltend diejenigen Teile des Stammbuchs Ausgabe A, welche stark verändert sind oder in den früheren Auflagen fehlen. Geheftet 40 Pfennig

Ausgabe B. Neue Ausgabe vollständig in 4 Bändchen.

Unterstufe. Gebunden 2 Mark

Oberstufe (in drei Bändchen)

I. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte in engster Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie. Gebunden 1.50 Mark

II. Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie. Gebunden 1.50 Mark

III. Funktionale Geometrie (Graphische Darstellung von Funktionen, Analytische Geometrie der Ebene, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung). Gebunden 1.50 Mark

Zeitschrift für das Gymnasialwesen. 1908 Heft 2/3: Der Kampf um die Existenz in der Schulbücherliteratur zwingt auch altbewährte Bücher, den Forderungen der Zeit Rechnung zu tragen und sich Umänderungen anzubequemen, die größer sind als die von Auflage zu Auflage vorgenommenen Verbesserungen einzelner Stellen. Auch Mehlers Werk ist dem Schicksal nicht entgangen. Freilich, was hier vorliegt, ist eigentlich ein neues Buch; denn die Disziplinen der Schulmathematik, die es enthält, fehlten in dem „alten" Mehler bis auf den ersten Abschnitt ganz. Dieser, der die Lehren von harmonischen Punkten und Strahlen, Kreispolaren, Transversalen, Ähnlichkeitspunkten und die Apollonische Berührungsaufgabe enthält, ist ziemlich unverändert herübergekommen. Neu aber sind der zweite und dritte Abschnitt. Der zweite bringt die Grundzüge der darstellenden Geometrie. Der dritte Abschnitt bringt in vier Kapiteln die Grundzüge der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte, indem sie einmal als geometrische Orte, dann als Kegelschnitte, darauf als Zentralprojektionen des Kreises, endlich als Erzeugnisse projektiver Gebilde betrachtet werden. **Der Lehrgang, der damit geboten wird, ist nach den Erfahrungen des Berichterstatters sehr geeignet, die Schüler lebhaft für den Gegenstand zu erwärmen und ihre Aufmerksamkeit dauernd zu fesseln. Die Darstellung in ihrer Kürze, Klarheit und Folgerichtigkeit zeigt den Meister der Lehrkunst.** Ein besonders hervorzuhebender **Vorzug des Buches sind die Figuren, die in tadelloser Korrektheit,** meistens auf besonderen Tafeln, und in großer Zahl, teilweise in mehreren Farben, ihm beigegeben sind. Es mag **eine Freude sein, nach diesem Werkchen unterrichten zu können.**